Φροντιστήρια Πρόοδος

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου

Κυριακή 23 Οκτωβρίου 2016

Θέμα Α

Α1. Διατυπώστε το κριτήριο παρεμβολής. (4Μ)

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνάρτηση ένα προς ένα. (4Μ)

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της. (3Μ)

Α4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ¦« \frac{1}{x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\cdot ¦« \frac{1}{x}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot ¦« x\right)$ δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot ¦« x\right)$ (4Μ)

Α5. Σωστό ή Λάθος (10Μ)

α) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και ένα προς ένα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x)+f(-x)=0$

γ) Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και f^{-1} είναι η αντίστροφη της. Τότε θα ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

δ) Αν f,g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to\sim} f(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to\sim} f(x)\cdot \mathrm{g(x)}=0$

ε) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{¦« x}=1$

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x+\ln x$

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα. (6Μ)

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (3Μ)

Β3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της αντίστροφης με την διχοτόμο της γωνίας του $1^{ου}$ τεταρτημορίου. (5Μ)

Β4. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)<\mathrm{x}-1$ (5Μ)

Β5. Να λυθεί η εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2-2x}{5x-10}\right)+x^2=7x-10$ (6Μ)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\sim+1)x^2+(\sim+\quad)x-5}{x^2-1}$ με $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=3$

Γ1. Να αποδειχθεί ότι $\sim=0$ και $\quad=-4$. (6Μ)

Γ2. Να αποδειχθεί ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση. (6Μ)

Γ3. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{¦«(f(x))}{\sqrt{x^2+11}-6}$. (6Μ)

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f^3(x)-5f^2(x)+4f(x)+6}{f^2(x)-3f(x)}$ (7Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{ax+\sqrt{x^2-1}}$ με $a\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)$ (5Μ)

Αν επιπλέον ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-6$ τότε:

Δ2. Να αποδειχθεί ότι $a=2$ (6Μ)

Δ3. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (7Μ)

Δ4. Να οριστεί η gof όπου $g(x)=\dfrac{\ln|x|}{2x+3}$ (7Μ)

Καλή Επιτυχία !!!

Ενδεικτικές Απαντήσεις

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1	Α4.	Α5.
Α2	α) 0	α) Σωστό
Α3	β) 1	β) Σωστό
Θεωρία	γ) 1	γ) Λάθος
Βλέπε σχολικό βιβλίο	δ) 0	δ) Λάθος
		ε) Σωστό

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. $f(x) = x + \ln x$. Πρέπει x>0 άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = (0, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ (1) και $x_1 < x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f ↗

Β2. Από το Β1 η f είναι ↗ άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Β3. Θέλω να λύσω το σύστημα $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases}$ αλλά δεν μπορώ να βρώ τον τύπο της f.

Επειδή όμως η f είναι γν. αύξουσα θα λύσω το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow \ln x + x = x \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Το κοινό σημείο είναι το Α(1,1)

Β4.

$$f^{-1}(x) < x - 1 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} x < f(x-1) \Rightarrow \cancel{x} < \cancel{x} - 1 + \ln(x-1) \Rightarrow \ln(x-1) > 1 \Rightarrow x - 1 = e \Rightarrow x > 1 + e$$

Β5.

$$\ln\left(\frac{x^2 - 2x}{5x - 10}\right) + x^2 + 10 = 7x \Rightarrow$$

$$\ln(x^2 - 2x) - \ln(5x - 10) = -x^2 + 2x + 5x - 10 \Rightarrow$$

$\ln(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x) = \ln(5x - 10) + (5x - 10) \Rightarrow$ (®° έ®£§ $x^2 - 2x > 0$ ©~§ $5x - 10 > 0$ (3))

$$f(x^2 - 2x) = f(5x - 10) \overset{1-1}{\Rightarrow}$$

$$x^2 - 2x = 5x - 10 \Rightarrow$$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{(\textasciitilde®-°° ί®²£²\textasciitilde§)} \\ ή \\ x = 5 \text{(\textasciitilde®-¢£©² ή ªύ±¦)} \end{cases} \Rightarrow x = 5$

γιατί από τους περιορισμούς (3) έχουμε

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 5x - 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ 5(x-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \text{ ή } x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$ άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$f(x)=\dfrac{(\alpha+1)x^2+(\alpha+\beta)x-5}{x^2-1} \Leftrightarrow f(x)(x^2-1)=(\alpha+1)x^2+(\alpha+\beta)x-5$ κοντά στο -1. Τότε:

$\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[(\alpha+1)x^2+(\alpha+\beta)x-5\right] \Leftrightarrow 3\cdot 0=\alpha+1-\alpha-\beta-5 \Leftrightarrow \beta=-4$ αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\frac{(\alpha+1)x^2+(\alpha-4)x-5}{x^2-1}=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\alpha x^2+x^2+\alpha x-4x-5}{x^2-1}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\alpha x\cancel{(x+1)}+(x-5)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\alpha x+x-5}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{-\alpha-6}{-2}=3 \Leftrightarrow \alpha=0$$

Γ2.

$f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-1}=\dfrac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\dfrac{x-5}{x-1}$. Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ έστω

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1-5}{x_1-1}=\frac{x_2-5}{x_2-1} \Leftrightarrow x_1x_2-x_1-5x_2+5=x_1x_2-5x_1-x_2+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_1=4x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι ¨1-1¨ και επομένως αντιστρέφεται.

Έστω

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-1}=y \Leftrightarrow (x-1)y=x-5 \Leftrightarrow xy-y=x-5 \Leftrightarrow xy-x=y-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y-1)=y-5 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x=\frac{y-5}{y-1}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{x-1}$ με $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{1\}$.

Γ3.

$$\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)}{\sqrt{x^2+11}-6}=\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)\left(\sqrt{x^2+11}+6\right)}{\sqrt{x^2+11}^2-6^2}=\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)\left(\sqrt{x^2+11}+6\right)}{x^2-25}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(f(x)\right)\left(\sqrt{x^2+11}+6\right)}{(x-5)(x+5)}=\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(\frac{x-5}{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+11}+6\right)}{(x-5)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\frac{\eta\mu\left(\frac{x-5}{x-1}\right)}{\frac{x-5}{x-1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+11}+6\right)}{(x+5)}\right]=\frac{1}{4}\cdot1\cdot\frac{12}{10}=\frac{3}{10}$$

αφού $\lim_{x\to5}\frac{\eta\mu\left(\frac{x-5}{x-1}\right)}{\frac{x-5}{x-1}}\underset{\lim_{x\to5}u=0}{\overset{u=\frac{x-5}{x-1}}{=}}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

Γ4.

$$\lim_{x\to-1}\frac{f^3(x)-5f^2(x)+4f(x)+6}{f^2(x)-3f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(f^2(x)-2f(x)-2\right)\left(f(x)-3\right)}{f(x)\left(f(x)-3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f^2(x)-2f(x)-2}{f(x)}\overset{\lim_{x\to-1}f(x)=3}{=}\frac{3^2-2\cdot3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Πρέπει $x^2-1\ge0$ και $ax+\sqrt{x^2-1}\ne0$. $x^2-1\ge0 \Leftrightarrow x^2\ge1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\ge\sqrt{1} \Leftrightarrow |x|\ge1 \Leftrightarrow x\ge1$ ή $x\le-1$. Αν $a>0$ και $x>0$ τότε $ax+\sqrt{x^2-1}>0$ άρα και $ax+\sqrt{x^2-1}\ne0$. Αν $a>0$ και $x<0$ τότε $ax+\sqrt{x^2-1}\ne0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\ne-ax \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-1})^2\ne(-ax)^2 \Leftrightarrow x^2-1\ne a^2x^2 \Leftrightarrow$ $-1\ne a^2x^2-x^2 \Leftrightarrow -1\ne x^2(a^2-1)$ που ισχύει . Αν $a<0$ και $x<0$ τότε $ax+\sqrt{x^2-1}>0$ άρα και $ax+\sqrt{x^2-1}\ne0$. Αν $a<0$ και $x>0$ τότε όπως και πριν $ax+\sqrt{x^2-1}\ne0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -1\ne x^2(a^2-1)$ που ισχύει . Τελικά $A_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Δ2. Αν $a=1$ τότε

$$\frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{(\sqrt{9x^2-x+1}-3x)(x-\sqrt{x^2-1})}{1}=x^2\frac{(-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3)(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{1}$$ άρα

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (μορφή $(+\infty)\cdot(-12)$) το οποίο απορρίπτεται . Για $a\ne1$ έχουμε .

$$\frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{ax+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x(-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3)}{x(a-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}=\frac{(-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3)}{(a-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}$$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-6}{a-1} \Leftrightarrow -6=\frac{-6}{a-1}$

$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{a-1} \Leftrightarrow a=2$.

Δ3. $$\frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{2x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{9x^2-x+1-9x^2}{x(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})(\sqrt{9x^2-x+1}+3x)}=\frac{1}{x}\frac{(-1+\frac{1}{x})}{(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})(\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3)}$$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\cdot(-\frac{1}{18})=0$.

Δ4. Για να οριστεί η gof πρέπει $x\in A_f$ και $f(x)\in A_g$ δηλαδή $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ και $f(x)\neq -\frac{3}{2}$. $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2-x+1}\neq 3x \Leftrightarrow x\neq 1$ και $f(x)\neq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{2x+\sqrt{x^2-1}}\neq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{9x^2-x+1}\neq -3\sqrt{x^2-1}$ που ισχύει πάντα . Άρα $A_{gof}=(-\infty.-1]\cup(1,+\infty)$ και

$$g(f(x))=\frac{\ln(\frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{2x+\sqrt{x^2-1}})}{2\frac{\sqrt{9x^2-x+1}-3x}{2x+\sqrt{x^2-1}}+3}.$$