Φροντιστήρια Πρόοδος

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου
Κυριακή 18 Δεκεμβρίου 2016

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα

$\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (3Μ)

Α2. Να αποδείξετε αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό το σημείο. (4Μ)

Α3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. (4Μ)

Α4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία; (4Μ)

Α5. Σωστό ή Λάθος (10Μ)

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$ τότε η f(x) είναι συνεχής στο x_o

2) Η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{2}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$

3) Αν μια περιττή, συνεχής συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με x = α, τότε θα έχει τοπικό μέγιστο στο –α

4) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g'(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους.

5) Αν για μια συνάρτηση ισχύει $f'(x)=3x^2$ τότε $f(x)=x^3$

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\\ \lambda, & x=0\end{cases}$

Β1. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων κ και λ. (6Μ)

Αν $\kappa=2$ και $\lambda=4$ τότε:

Β2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (6Μ)

Β3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (6Μ)

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1). (7Μ)

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

- Η f είναι παραγωγίσιμη , για κάθε x$\in\mathbb{R}$
- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x+4}{x-2}=2017$
- $|g(x)-1|\leq|f(x)-2|$, για κάθε x$\in\mathbb{R}$
- $f(1)\cdot\left(f(1)+6\right)+f(3)\cdot\left(f(3)+2\right)+10=0$

τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f\left(2\right)=2$ και $g\left(2\right)=1$. (5Μ)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η g συνεχής στο 2. (5Μ)

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες x_1, x_2 θετικές και άνισες. (5Μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,3)$ ώστε $f'(\xi_1)=0$. (5Μ)

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(1,3)$ ώστε $\frac{f(\xi_2)}{\xi_2}=f'(\xi_2)$ (5Μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:[-a,a]\to R$ η οποία είναι συνεχής στο $[-a,a]$, παραγωγίσιμη στο $(-a,a)$, έχει εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{9\sqrt{5}}{5}$ και όλα τα σημεία $M(x,f(x))$ της γραφικής της παράστασης βρίσκονται πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=a^2$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_o\in(-a,a)$ ώστε στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$ η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον άξονα των x. (7Μ)

Δ2. Να αποδειχθεί ότι $\alpha=3$ (6Μ)

Δ3. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$. (6Μ)

Δ4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_1\in(-a,a)$ ώστε $f(x_1)=\sqrt{\ln(\ln x_1)}$ (6Μ)

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1 εώς Α4. Βλέπε σχολικό βιβλίο

Α5. Σωστό ή Λάθος

1-Λ
2-Λ
3-Σ
4-Λ
5-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η f είναι συνεχής θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)} + \frac{\kappa}{1-x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right] = 2+\kappa\cdot 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = 4-3\cdot 0 = 4 \ \text{ και } \ f(0)=\lambda$$

Άρα $\lambda = 4$ και $2+\kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$

Β2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}-3x\right) \overset{x>0}{=}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}-3\right)\right] = -\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}-3\right) = \sqrt{8}-3 = 2\sqrt{2}-3<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Β3. Ζητάμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}\right)$

Ξέρω ότι
$$-1\le \eta\mu x\le 1 \Rightarrow -2\le 2\eta\mu x\le 2 \Rightarrow 2x-2\le 2x+2\eta\mu x\le 2x+2$$
$$\overset{x-x^2<0}{\Rightarrow} \frac{2x-2}{x-x^2} \ge \frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} \ge \frac{2x+2}{x-x^2}$$

αφού $x-x^2<0$ όταν $x\to-\infty$

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{x-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+2}{x-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}\right) = 0$

B4. Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=f(x)-2\ln(8x+1)$, $x\in[0,1]$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$g(0)=f(0)-2\ln(8\cdot 0+1)=f(0)-2\ln 1=4>0$ και

$g(1)=f(1)-2\ln(8\cdot 1+1)=2-2\ln 9=2(1-\ln 9)<0$ δηλ. $g(0)\cdot g(1)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-2\ln(8x+1)=0\Leftrightarrow f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$|g(x)-1|\le|f(x)-2|\Leftrightarrow-|f(x)-2|\le g(x)-1\le|f(x)-2|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-|f(x)-2|\le g(x)\le 1+|f(x)-2| \qquad (1)$$

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-3x+4}{x-2}$ κοντά στο 2 με $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=2017$,

$h(x)(x-2)=f(x)-3x+4\Leftrightarrow f(x)=h(x)(x-2)+3x-4$ τότε

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(h(x)(x-2)+3x-4\right)=\lim_{x\to 2}h(x)\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)+\lim_{x\to 2}(3x-4)=$$
$$=2017\cdot 0+6-4=2$$

$$f(2)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi}{\overset{f}{=}}\lim_{x\to 2}f(x)=2$$

Η σχέση (1) για x = 2 γίνεται:

$$1-|f(2)-2|\le g(2)\le 1+|f(2)-2|\Leftrightarrow 1\le g(2)\le 1\Leftrightarrow g(2)=1$$

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)$

από την σχέση (1) έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 2}\left(1-|f(x)-2|\right)=1-0=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+|f(x)-2|\right)=1+0=1$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=1=g(2)$ άρα η g συνεχής στο 2.

Γ3. Έχουμε

$$f(1)\cdot(f(1)+6)+f(3)\cdot(f(3)+2)+10=0\Leftrightarrow$$
$$(f(1))^2+6f(1)+9+(f(3))^2+2f(3)+1=0\Leftrightarrow$$
$$(f(1)+3)^2+(f(3)+1)^2=0\Leftrightarrow$$
$$f(1)+3=0 \quad \text{και} \quad f(3)+1=0\Leftrightarrow$$
$$f(1)=-3 \quad \text{και} \quad f(3)=-1$$

Η f συνεχής στο $x\in[1,2]$

και $f(1)=-3<0$, $f(2)=2>0$ δηλ. $f(1)\cdot f(2)<0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 τουλ. ρίζα x_1 στο $(1,2)$

Η f συνεχής στο $x \in [2,3]$

και $f(3) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ δηλ. $f(2) \cdot f(3) < 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 1 τουλ. ρίζα x_2 στο$(2,3)$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες x_1, x_2 θετικές και άνισες.

Γ4. Η f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (1,3)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$

Γ5. Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [x_1, x_2]$

Η h συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h(x_1) = h(x_2) = 0$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_1, x_2) \subseteq (1,3)$ ώστε

$h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \dfrac{f(\xi_2)}{\xi_2}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Ισχύει ότι $x^2 + f^2(x) = a^2$ για κάθε $x \in [-a, a]$ άρα για $x = -a$ έχουμε $f(-a) = 0$ και για $x = a$ έχουμε $f(a) = 0$. Η $f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ROLLE στο διάστημα $[-a, a]$ άρα υπάρχει $x_o \in (-a, a)$ ώστε $f'(x_o) = 0$ που είναι το ζητούμενο.

Δ2. Έστω το σημείο $M(k, f(k))$ στο οποίο η C_f έχει εφαπτομένη την ε .Ισχύουν οι σχέσεις (1) $f(k) = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \cdot k + \dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ και (2) $f'(k) = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Επίσης έχουμε $x^2 + f^2(x) = a^2 \Leftrightarrow$ $2x + 2f(x)f'(x) = 0$ για $x = k$ έχουμε την σχέση (3) $k + f(k)f'(k) = 0$. Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε τελικά $k = 2$ και $f(2) = \sqrt{5}$. Για $x = 2$ στην $x^2 + f^2(x) = a^2$ έχουμε τελικά $a = 3$.

Δ3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$ άρα η $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$ και συνεχής σε αυτό από υπόθεση , άρα διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$. Αφού $f(2) = \sqrt{5}$ η $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-3,3]$. Έχουμε $x^2 + f^2(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) = 9 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow$ $|f(x)| = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (αφού $f(x) \geq 0$).

Δ4. Ορίζουμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - \sqrt{\ln(\ln x)}$ στο διάστημα $[e, 3]$. Ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος BOLZANO άρα υπάρχει $x_1 \in (e, 3) \subset [-3, 3]$ ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow$ $f(x_1) = \sqrt{\ln(\ln x_1)}$.