ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 13 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2016

Θέμα Α

Α1. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, εφόσον $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$. (Μονάδες 4)

Α2. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$.Να αποδείξετε ότι για το μέτρο του ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Μονάδες 3)

Α3. Δώστε τους παρακάτω ορισμούς:
Πότε δύο διανύσματα λέγονται: α) παράλληλα, β) ομόρροπα, γ) αντίρροπα, δ) ίσα, ε) αντίθετα
και πότε ένα διάνυσμα λέγεται στ) μοναδιαίο και ζ) μηδενικό. (Μονάδες 7)

Α4. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.(Μονάδες 5)

1. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους.
2. Αν δύο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα.
3. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, y_2)$, τότε $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \mu x_2 + \mu y_2)$.
4. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.
5. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ είναι μοναδιαίο.

Α5. Δίνονται τα σημεία Α(3,1) , Β(-1,4) , Γ(7,4) , Ο(0,0) και Μ το μέσο του ΑΒ. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την αντίστοιχη τιμή της στήλης Β. (Μονάδες 6)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB}$	Α. (-8,0)
2. $\overrightarrow{A\Gamma}$	Β. (-4,-3)
3. $2 \cdot \overrightarrow{OM}$	Γ. (4,3)
4. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$	Δ. (-4,3)
5. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM}$	Ε. (4,-3)
6. $\overrightarrow{\Gamma B}$	Ζ. (0,0)
	Η. (5,2)
	Θ. Άλλο

<u>Θέμα Β</u>

Δίνονται τα σημεία Α(-2,2) , Β(1,5) , Γ(1,-1) και Δ(1,3).

Β1. Βρείτε τις συντεταγμένες και τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{A\Gamma}\ και\ \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 6)

Β2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 4)

Β3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 4)

Β4. Βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x που να ισαπέχει από τα Α και Δ. (Μονάδες 5)

Β5. Αν Ν(λ,7) , να βρεθεί, αν υπάρχει, πραγματικός αριθμός λ ώστε:

1) $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AB}$.(Μονάδες 3)
2) $\overrightarrow{AN} \nearrow\swarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.(Μονάδες 3)

<u>Θέμα Γ</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 120°$, για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right) = -24 \quad και \quad \vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = 22$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 5$. (Μονάδες 8)

Γ2. Να βρείτε το γινόμενο $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$. (Μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε το μέτρο $\left|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right|$. (Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε για ποια τιμή του λ $\in\mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 7)

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Αν η εξίσωση

$$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|x^2 - 2\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|x + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 0$$

έχει μοναδική λύση, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα. (Μονάδες 8)

Δ2. Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha}$, μη παράλληλο στον x΄x, για το οποίο ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|\cdot(1,-1)-(2,-1)$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} = (3,-4)$. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$ που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο του $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 3)

iii) Θεωρούμε τα σημεία Α(λ,-2λ) και Β(1-4λ,λ+6) , με λ $\in\mathbb{R}$. Αν $\overrightarrow{AB}\,//\,\vec{\alpha}$, τότε να βρείτε:

α) Την τιμή του λ. (Μονάδες 4)

β) Τις συντεταγμένες του σημείου Κ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BK}$. (Μονάδες 4)

Καλή Επιτυχία !!!

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 43.
Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ 34.
Α3. Σχολικό βιβλίο α) σελ. 12 , β) σελ.12 , γ) σελ. 13 , δ) σελ. 13 , ε) σελ. 13 , στ) σελ.11 , ζ) σελ.11.
Α4. 1. Λ , 2. Λ , 3. Λ , 4. Λ, 5. Σ.
Α5. 1. Δ , 2. Γ , 3. Θ , 4. Α , 5. Ζ , 6. Α.

Θέμα Β

Β1. $\overrightarrow{AB} = (3,3)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$.
$\overrightarrow{A\Gamma} = (3,-3)$, $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 3\sqrt{2}$.
$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0,4)$, $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 4$.

Β2. $\overrightarrow{B\Gamma} = (0,-6)$.
$\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta} \xRightarrow{\kappa\alpha\iota\ \Gamma\ \kappa o\iota\nu\acute{o}} B, \Gamma, \Delta\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}$.

Β3. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$. Άρα τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
Αφού $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| = 3\sqrt{2}$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = (3,3) \cdot (3,-3) = 9 - 9 = 0$. Δηλαδή $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ορθογώνιο.

Β4. $M(x_M, 0)$.
$$(MA) = (M\Delta) \Rightarrow \sqrt{(-2 - x_M)^2 + 2^2} = \sqrt{(1 - x_M)^2 + 3^2}$$
$\Rightarrow 4 + 4x_M + {x_M}^2 + 4 = 1 - 2x_M + {x_M}^2 + 9 \Rightarrow 6x_M = 2 \Rightarrow x_M = \frac{1}{3}$.
Άρα $M\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Β5. $\overrightarrow{AN} = (\lambda + 2, 5)$.
i. $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 3(\lambda + 2) + 5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -7$.
ii. $\det(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$.
Δηλαδή $\overrightarrow{AN} = (0,5)\ \kappa\alpha\iota\ \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0,4)$ άρα ομόρροπα, συνεπώς δεν υπάρχει λ ώστε να είναι αντίρροπα.

Θέμα Γ

Γ1. $\begin{cases} \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = -24 \\ 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\vec{\beta} = 48 \\ 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} = 22 \end{cases} \Rightarrow -7\vec{\alpha}\vec{\beta} = 70 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -10$.
Άρα : $\vec{\alpha}^2 - 40 = -24 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 = 16 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 16 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 4$.
$\vec{\alpha}\vec{\beta} = -10 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu 120 = -10 \Rightarrow 4|\vec{\beta}|\left(-\frac{1}{2}\right) = -10 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 5$.

Γ2. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2$
$= 16 + 10 - 50 = -24$.

Γ3. $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 =$

$= 4 \cdot 16 + 12 \cdot (-10) + 9 \cdot 25 = 169 \Rightarrow \left|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right| = 13.$

Γ4. $\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \left(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = 0$

$\Rightarrow \lambda\vec{\alpha}^2 + 2\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = 0 \Rightarrow 16\lambda - 20\lambda - 10 + 50 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 40$

$\Rightarrow \lambda = 10.$

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. Πρέπει: $\Delta = 0 \Rightarrow 4\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 - 4\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = 0 \Rightarrow 4\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = 4\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2$

$\Rightarrow \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 \Rightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2$

$\Rightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Rightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0.$

$|\vec{u}|^2 = \left|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2}.$

$|\vec{v}|^2 = \left|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2$

$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2}.$

Άρα : $|\vec{u}| = |\vec{v}|.$

Δ2. i. $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot (1, -1) - (2, -1) \Rightarrow \vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}|, -|\vec{\alpha}|) - (2, -1)$

$\Rightarrow \vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, -|\vec{\alpha}| + 1).$

$|\vec{\alpha}|^2 = (|\vec{\alpha}| - 2)^2 + (-|\vec{\alpha}| + 1)^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}| + 4 + |\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}| + 1$

$\Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 6|\vec{\alpha}| + 5 = 0 \Rightarrow (|\vec{\alpha}| - 5)(|\vec{\alpha}| - 1) = 0$

$\Rightarrow |\vec{\alpha}| = 5$ ή $|\vec{\alpha}| = 1$ $\alpha\pi o\rho.\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \vec{\alpha} = (-1,0) \parallel x'x \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 5.$

Άρα: $\vec{\alpha} = (3, -4).$

ii. $\vec{\beta} = \mu \cdot \vec{\alpha}\ , \mu < 0\ \kappa\alpha\iota\ \left|\vec{\beta}\right| = 3|\vec{\alpha}| \Rightarrow |\mu \cdot \vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}|$

$\Rightarrow |\mu \cdot \vec{\alpha}|^2 = (3|\vec{\alpha}|)^2 \Rightarrow (\mu \cdot \vec{\alpha})^2 = 9|\vec{\alpha}|^2 \Rightarrow \mu^2 \cdot \vec{\alpha}^2 = 9\vec{\alpha}^2 \Rightarrow \mu^2 = 9$

$\overset{\mu<0}{\Longrightarrow} \mu = -3.$

Άρα: $\vec{\beta} = (-9,12).$

iii. $\overrightarrow{AB} = (-5\lambda + 1, 3\lambda + 6)$

α) $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{\alpha} \Rightarrow \det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -5\lambda + 1 & 3\lambda + 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 20\lambda - 4 - 9\lambda - 18 = 0 \Rightarrow 11\lambda = 22 \Rightarrow \lambda = 2.$

β) Άρα A(2,-4) , B(-7,8).

Έστω $K(x_K, y_K)$.

$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BK} \Rightarrow (x_K - 2, y_K + 4) = 2(x_K + 7, y_K - 8) \Rightarrow$

$\begin{cases} x_K - 2 = 2x_K + 14 \\ y_K + 4 = 2y_K - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = -16 \\ y_K = 20 \end{cases}$. Άρα K(-16,20).