ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 25 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2015
ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της; Τι λέμε τότε παράγωγο της f στο σημείο x_o; (4Μ)

Α2. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f(x)=a^x$ με α>0 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ (4Μ)

β) η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. (4Μ)

Α3. Πότε λέμε ότι δυο συναρτήσεις f και g είναι ίσες; (3Μ)

Α4. Σωστό ή Λάθος; (10Μ)

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι άρτια τότε θα είναι οπωσδήποτε περιττή.
β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o τότε θα είναι και παραγωγίσιμη στο ίδιο σημείο x_o.

γ) Αν $f(x)=\ln x$ και $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ τότε το πεδίο ορισμού της $f'(x)$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$.

δ) Ισχύει $\left(\eta\mu(\mathrm{x}_o)\right)'=\sigma\upsilon\nu(\mathrm{x}_o)$ για κάθε $x_o\in\mathbb{R}$.
ε) Αν μια ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη στην C_f τότε η ευθεία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την C_f.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2-1}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για τις παραπάνω συναρτήσεις. (4Μ)

Β2. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $M\left(\dfrac{1}{2},\mathrm{g}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$. (4Μ)

Β3. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $(fog)(x)$ και $(gof)(x)$ (6Μ)

Β4. Να βρεθεί η αντίστροφη της g(x) και να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1. (6Μ)

Β5. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι , να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό σύνολο στο οποίο ισχύει $f=g$ (5Μ)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , x\in[0,+\infty)-\{2\} \\ x & , x\in[-1,0) \\ \ln(x+2)-1 & , x\in(-2,-1) \end{cases}$

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (4Μ)

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ=(-2,0). (5Μ)

Γ3. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της C_f στα σημεία $A\left(3,f(3)\right)$ και $B\left(\frac{1}{e}-2,f\left(\frac{1}{e}-2\right)\right)$ αντίστοιχα. (8Μ)

Γ4. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (8Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ και η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$. Επίσης δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(fof)(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $g(x+y)=g(x)+g(y)$ για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$. (5Μ)

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και αντιστρέφεται. (9Μ)

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)+f^{-1}(x)$ είναι περιττή. (4Μ)

Δ4. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $(hog)(x)$ και $(goh)(\mathrm{x})$ και να δείξετε ότι $goh=hog$, όπου h(x) η συνάρτηση του ερωτήματος Δ3. (Μ3)

Δ5. Αν $f(1)=3$ να λυθεί η εξίσωση $3f^{-1}\left[g(1)+7\left(f\left(x+\frac{f^{-1}(3)}{3}\right)\right)\right]=2$ (Μ4)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 213

Α2. α) Σχολικό βιβλίο σελ.234

β) Σχολικό βιβλίο σελ.224

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.141

Α4.

α -> Λάθος

β -> Λάθος

γ -> Λάθος

δ -> Λάθος

ε -> Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για την f πρέπει $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$ άρα $A_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

Για την g πρέπει $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ άρα $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Β2.

$$y-g\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=-4x$$

Β3.

$$\left(f\circ g\right)(x)=f\left(g\left(x\right)\right)=\frac{\left|\frac{1}{x-1}\right|+1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1}$$ με πεδίο ορισμού :

$$A_{fog}=\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases}=\begin{cases} x\neq 1 \\ \frac{1}{x-1}\neq \pm 1 \end{cases}=\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 0\ \&\ \mathrm{x}\neq 2 \end{cases}=\mathbb{R}-\{0,1,2\}$$

$$\left(gof\right)(x)=g\left(f(x)\right)=\frac{1}{\frac{|x|+1}{x^2-1}-1}$$ με πεδίο ορισμού :

$$A_{gof}=\begin{cases} x\in A_f \\ \mathrm{f}(x)\in A_g \end{cases}=\begin{cases} x\neq \pm 1 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}=\begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}=\mathbb{R}-\{\pm 1,\pm 2\}$$

Β4.

Έστω $x_1,x_2\in A_g$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow \dfrac{1}{x_1-1}=\dfrac{1}{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η g είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτω $y=g(x)\Rightarrow y=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow yx-y=1\overset{y\neq 0}{\Rightarrow} x=\dfrac{1+y}{y}\Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{x}$

Για την $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2-1}$ παρατηρώ ότι $f(2)=f(-2)=1$ άρα η g δεν είναι 1-1.

Β5.

$f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2-1}=\dfrac{|x|+1}{|x|^2-1}=\dfrac{|x|+1}{\left(|x|-1\right)\left(|x|+1\right)}=\dfrac{1}{|x|-1}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ για να έχουν ίδιο τύπο πρέπει $x\geq 0$.

Ακόμα $A_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$ και $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$ άρα $A_g\cap A_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

άρα είναι ίσες στο σύνολο $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$A_f=(-2,2)\cup(2,+\infty)$

Γ2.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , x\in[0,+\infty)-\{2\} \\ x & , \quad x\in[-1,0) \\ \ln(x+2)-1 & , \quad x\in(-2,-1) \end{cases}$$

Διακρίνω περιπτώσεις:

α) Αν $x_1,x_2\in(-2,-1)$ $\mu\varepsilon$ $x_1<x_2$ τότε:

$x_1<x_2\Rightarrow x_1+2<x_2+2\Rightarrow \ln(x_1+2)<\ln\left(x_2+2\right)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ (1)

β)) Αν $x_1,x_2\in[-1,0)$ $\mu\varepsilon$ $x_1<x_2$ τότε:

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ (2)

γ) Αν $x_1\in(-2,-1)$ και $x_2\in[-1,0)$ τότε:

$-2 < x_1 < -1 \Rightarrow 0 < x_1 + 2 < 1 \Rightarrow \ln(x_1+2) < 0 \Rightarrow \ln(x_1+2) - 1 < -1 \Rightarrow f(x_1) < -1$ και $-1 \le x_2 < 0 \Rightarrow f(x_2) > -1$

άρα $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ (3)

Δηλαδή από τις σχέσεις (1),(2) και (3)

για κάθε $x_1, x_2 \in (-2,0)$ $με$ $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ άρα η f $\nearrow$

Γ3.

$3 \in [0,+\infty) - \{2\}$ οπότε $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = x-3$ οπότε η εφ/νη είναι:

$y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow \mathrm{y = x - 3}$.

Ακόμα $2 < e < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{5}{3} < \dfrac{1}{e} - 2 < -\dfrac{3}{2}$

Άρα $\left(\dfrac{1}{e} - 2\right) \in (-2,-1)$ άρα $f(x) = \ln(x+2) - 1$ οπότε η εφ/νη είναι:

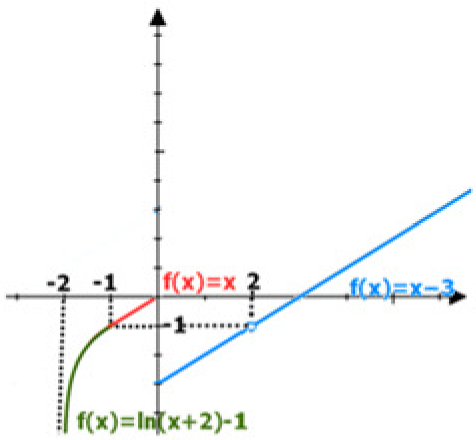
$y - f(\dfrac{1}{e} - 2) = f'(\dfrac{1}{e} - 2)(x - \dfrac{1}{e} + 2) \Rightarrow \mathrm{y} = e\,\mathrm{x} - 3 + 2e$

Γ4.

Η $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = x-3$ είναι το κομμάτι της ευθείας $y = x-3$ για όλα τα $x \ge 0$ εκτός του σημείου με x=2.

Η $f(x) = x$ είναι το κομμάτι της ευθείας $y = x$ με $-1 \le x < 0$.

Η $f(x) = \ln(x+2) - 1$ είναι παράλληλη μεταφορά της $y = \ln x$ κατά 2 μονάδες αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχουμε ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ (1) οπότε:

$$g(x+y)=f(f(x+y))\overset{(1)}{=}f(f(x)+f(y))\overset{(1)}{=}f(f(x))+f(f(y))=\mathrm{g(x)}+\mathrm{g(y)}$$

Δ2.

η (1) για $x=y=0\Rightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

Και αφού η f έχει μοναδική ρίζα αυτή είναι η x=0 διότι $\boxed{f(0)=0}$ (2).

η (1) για $y=-x\Rightarrow f(x-x)=f(x)+f(-x)\overset{(2)}{\Rightarrow}\cancel{f(0)}=f(x)+f(-x)$ Δηλ. $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ (3) άρα είναι περιττή.

η (1) για $y=-y\Rightarrow f(x-y)=f(x)+f(-x)\overset{(3)}{\Rightarrow}f(x-y)=f(x)-f(y)$

Άρα $\boxed{f(x-y)=f(x)-f(y)}$ (4)

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\overset{(4)}{\Rightarrow}f(x_1-x_2)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Δ3.

Έστω $y_0\in f(\mathbb{R})\Rightarrow f(x_0)=y_0$ για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow -f(x_0)=-y_0\overset{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{\Rightarrow}f(-x_0)=-y_0\Rightarrow -y_0\in f(\mathbb{R})$

Έστω λοιπόν ότι $f^{-1}(-y)=z$. Θα δείξω ότι $z=-f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(-y)=z\Leftrightarrow -y=f(z)\Leftrightarrow y=-f(z)\overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{\Leftrightarrow}y=f(-z)\Leftrightarrow -z=f^{-1}(y)\Leftrightarrow z=-f^{-1}(y)$$

Άρα $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$

Τότε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(-x)=f(-x)+f^{-1}(-x)\overset{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\varepsilon}\varsigma}{=}-f(x)-f^{-1}(x)=-h(x)$ άρα η h(x) περιττή.

Δ4.

$$(hog)(x)=h\big(g(x)\big)=f\big(g(x)\big)+f^{-1}\big(g(x)\big)=f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)+f(x)$$

Με πεδίο ορισμού $A_{hog}=\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{cases}=\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ g(x)\in\mathbb{R}\end{cases}=\mathbb{R}$

και $(goh)(x)=g(h(x))=g\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)\overset{\Delta 1}{=}g\left(f(x)\right)+g\left(f^{-1}(x)\right)=f(f(f(x)))+f(x)$

Με πεδίο ορισμού $A_{goh}=\begin{cases} x\in A_h \\ \text{h}(x)\in A_g \end{cases}=\begin{cases} x\in \mathbb{R} \\ \text{h}(x)\in \mathbb{R} \end{cases}=\mathbb{R}$

Οι συναρτήσεις hog και goh είναι ίσες γιατί έχουν ίδιο τύπο και ίδιο πεδίο ορισμού.

Δ5.

Παρατηρώ ότι

$$f(1)=3\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=3\overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=3\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=1 \text{ και } f^{-1}(1)=\frac{1}{3}$$

Ακόμα

$$f(1)=3\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=3\overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=3\Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=2 \text{ και } f^{-1}(2)=\frac{2}{3}$$

και $g(1)=f(f(1))=\text{f}(3)=f(1+1+1)=f(1)+f(1)+f(1)=9$

Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$3f^{-1}\left[g(1)+7\left(f\left(x+\frac{f^{-1}(3)}{3}\right)\right)\right]=2\Leftrightarrow f^{-1}\left[9+7\left(f\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}\left[9+7\left(f\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]=f^{-1}(2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}9+7\left(f\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)=2\Leftrightarrow$$

$$7\left(f\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)=-7\Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{3}\right)=-1\Leftrightarrow f\left(x+\frac{1}{3}\right)\overset{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}-f\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right)\overset{1-1}{=}f\left(-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$