ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 20 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = ª x +$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Α5. Σωστό ή Λάθος ;

1. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.
2. Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$
3. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] τότε ισχύει $\int_a f(x)dx = f(\ ) - f(\sim)$
4. $\left(\int_a f(x)dx\right)' = 0$, για κάθε x στο [α,β]
5. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

(3+3+6+3+10=25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \le 1 \\ x^3 + x - & x > 1 \end{cases}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R.

Β1. Να αποδειχθεί ότι $a = 2$ και $= -1$.

Β2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

Β3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) $y = 7x - 3$.

Β4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα των x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

(6+6+6+7=25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και την ιδιότητα

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x)-x\cdot e^{-f(x)}=\sqrt{x^2+1}\cdot e^{-f(x)}$$ για κάθε $x\in R$.

Γ1. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Γ2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Γ3. Να βρεθεί το πρόσημο της f.

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα των x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

(7+6+6+6=25 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται $f:[1,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη με $\ln x\le f(x)\le x-1$ για κάθε $x>1$

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(1,f(1))$.

Δ2. Να αποδειχθεί ότι $x\ln x-x+1\le\int_1^x f(t)dt\le\frac{(x-1)^2}{2}$ για κάθε $x\ge1$.

Δ3. Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to1}\left(\int_1^x\frac{f(t)-\ln x}{x-1}dt\right)$.

Δ4. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{2E}\le e-1$ όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα των x και την ευθεία $x=e$.

Δ5. Αν γνωρίζουμε ότι η f(x) έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y={}^{a}x+$ με ≤ -1, τότε να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x-1)-\frac{({}^{a}-1)x^2}{4}=f(x)$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

(5x5=25 Μονάδες)

Καλή Επιτυχία !!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 280
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 169
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 253
Α4. Σχολικό βιβλίο σελ. 273

Α5.
α -> Λάθος
β -> Σωστό
γ -> Λάθος
δ -> Σωστό
ε -> Σωστό

ΘΕΜΑ Β
Β1.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής, επομένως και στο 1 δηλαδή ισχύει :
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+ax\right) = 1+a$ (1)
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x-b\right) = 2-b$ (2)
Από (1),(2) έχουμε $a=1-b$ (3)
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1 δηλαδή ισχύει :
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1+a) = 2+a \quad (4)$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x-b-(1+a)}{x-1} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x-b-1-1+b}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+x-2}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+x+2\right) = 4$$
Άρα $2+a=4 \Leftrightarrow a=2$ και από την (3) έχουμε $b=-1$

Β2.
Έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 1 \\ x^3+x+1 & x>1 \end{cases}$ και $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & x\le 1 \\ 3x^2+1 & x>1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
f΄	-	0	+	0	+	
f	↘		↗		↗	
		Ο.Ε.				

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1)=-1$

Β3.

Επειδή η f γν. αύξουσα στο π.ο της θα είναι και "1-1" άρα και αντιστρέψιμη.

Για $x\in(-\infty,1]$, $f'(x)=7 \Leftrightarrow 2x+2=7 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ απορρίπτεται αφού $\frac{5}{2}\notin(-\infty,1]$

Για $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)=7 \Leftrightarrow 3x^2+1=7 \Leftrightarrow 3x^2=6 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ ή\ x=-\sqrt{2}$, η $-\sqrt{2}\notin(1,+\infty)$ άρα απορρίπτεται.

$f\left(\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+1$ και $f'\left(\sqrt{2}\right)=7$ άρα η εφαπτομένη είναι:

$y-f\left(\sqrt{2}\right)=f'\left(\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow y=7x-4\sqrt{2}+1$

Β4.

$$E=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_{1}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{0}\left|f(x)\right|dx+\int_{0}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_{1}^{2}\left|f(x)\right|dx=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(-f(x)\right)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}\left(-x^2-2x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x^2+2x\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^3+x+1\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{1}^{2}=...=12-\frac{37}{12}$$

Αφού για $x\in(-\infty,1]$ $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2+2x>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$, $f(x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x<0 \Leftrightarrow x\in(-2,0)$ και για $x\in(1,+\infty)$ $f(x)=x^3+x+1>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x)-x\cdot e^{-f(x)}=\sqrt{x^2+1}\cdot e^{-f(x)}\overset{e^{f(x)}}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x)e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\overset{\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\Rightarrow}$$

$$f'(x)e^{f(x)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\Rightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'\overset{±³¬.ΘΜΤ}{\Rightarrow}$$

$$e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+x+c\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}c=0$$

Άρα $e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+x\Rightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

Αφού $\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε x διότι:
α) Αν $x\geq 0$
τότε $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$ ισχύει πάντα
β) Αν $x<0$
Τότε $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \overset{¯£²}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2>(-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει

Γ2.
Αφού $\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε x το πεδίο ορισμού της f είναι $\mathrm{A}=\mathbb{R}$
Επίσης $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$
Η f είναι συνεχής , γνησίως αύξουσα , με πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.
Από συνέπειες Θ.Bolzano θα έχει σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\overset{-\infty+\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=0$

θέτω $u=x+\sqrt{x^2+1}$, με $u\to 0^+$ ό²~¬ $x\to-\infty$ οπότε
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\lim\limits_{u\to 0^+}(\ln u)=-\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$

Ακόμα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$
θέτω $w=x+\sqrt{x^2+1}$, με $w\to+\infty$ ό²~¬ $x\to+\infty$ οπότε
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

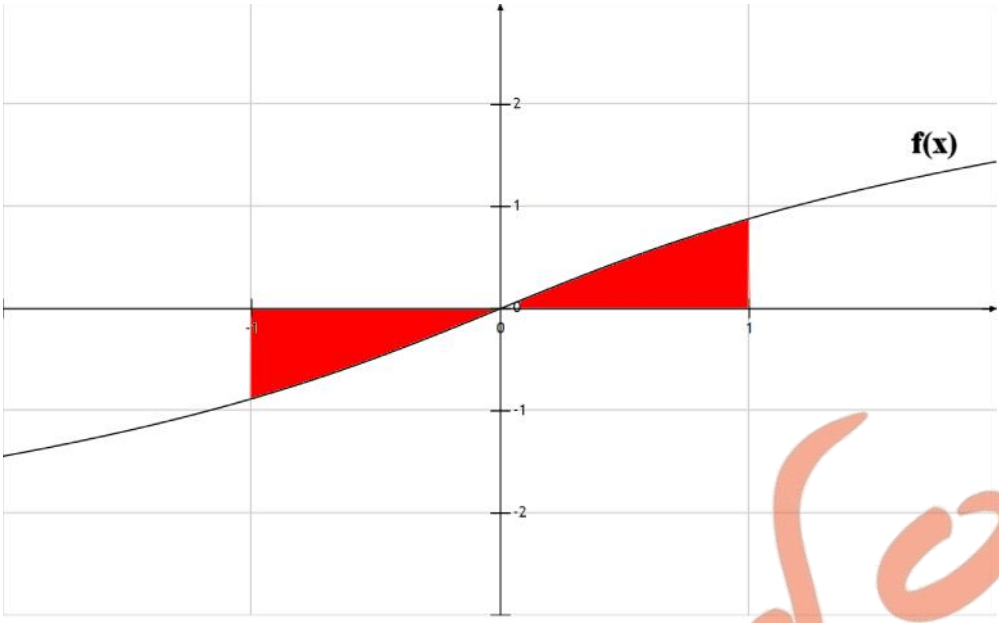
άρα $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

Γ3.
Η f είναι γνησίως αύξουσα με ρίζα x=0 διότι $f(0)=0$ άρα

$f(x)<0$ ~¬ $x<0$ *και*
$f(x)>0$ ~¬ $x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

Γ4.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\text{E}=\int_0^1 \left| f(x)dx \right| = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = E_1 + E_2$$

Υπολογίζω ξεχωριστά: $E_1 = -\int_{-1}^{0} f(x)dx$ οπότε

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_{-1}^{0} (x)' \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\left[\text{x}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \text{x}\cdot\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' dx =$$

$$\left[\text{x}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \text{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\left[\text{x}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$\left[\text{x}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-1}^{0} - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{0} =$$

$$\ln(\sqrt{2}-1)-1+\sqrt{2}$$

Άρα $E_1 = -\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\ln(\sqrt{2}-1)+1-\sqrt{2} = \ln(\sqrt{2}+1)+1-\sqrt{2}$

Με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία δείχνω ότι

$$E_2 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$\ln(\sqrt{2}+1)+1-\sqrt{2}$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να δείξω ότι η f είναι περιττή αφού $f(-x)=f(x)$ οπότε λόγω συμμετρίας θα ισχύει $E_1=E_2$)

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=2\ln(\sqrt{2}+1)+2-2\sqrt{2}$

Θέμα Δ

Δ1.

Έστω $f:[1,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη με $\ln x\le f(x)\le x-1$ για κάθε $x>1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\ln x=0\\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)=0\end{array}\right\}\overset{\text{Κ°.Π~°.}}{\Rightarrow}\lim_{x\to1}f(x)=0\overset{\text{±³¬£¡ή\$}}{\Rightarrow}f(1)=0$$

Ακόμα η ανίσωση γίνεται: $\ln x\le f(x)-f(1)\le x-1\Rightarrow\dfrac{\ln x}{x-1}\le\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le1$ οπότε

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1\overset{\text{Κ°.Π~°.}}{\Rightarrow}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\Rightarrow f'(1)=1$$

Η εφαπτομένη στο M(1,f(1)) έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=x-1$

Δ2.

Ισχύει $\ln t\le f(t)\le t-1\overset{x>1}{\Rightarrow}\int_1^x\ln t\,dt\le\int_1^x f(t)dt\le\int_1^x(t-1)dt\Rightarrow x\ln x-x+1\le\int_1^x f(t)dt\le\dfrac{(x-1)^2}{2}$

για κάθε $x\ge1$.

διότι $\int_1^x\ln t\,dt=\int_1^x(t)'\ln t\,dt=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x 1dt=\left[t\ln t-t\right]_1^x=x\ln x-x+1$

και $\int_1^x(t-1)dt=\left[\dfrac{t^2}{2}-t\right]_1^x=\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{x^2-2x+1}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{2}$

Δ3.

έχουμε

$$\int_1^x\frac{f(t)-\ln x}{x-1}dt=\frac{1}{x-1}\left(\int_1^x f(t)dt-\ln x\int_1^x 1dt\right)=\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}-\ln x$$ οπότε η σχέση από το ερώτημα Δ2 δίνει:

$$x\ln x - x + 1 \le \int_1^x f(t)dt \le \frac{(x-1)^2}{2} \Rightarrow \frac{x\ln x - x + 1}{x-1} \le \frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1} \le \frac{(x-1)}{2} \Rightarrow$$

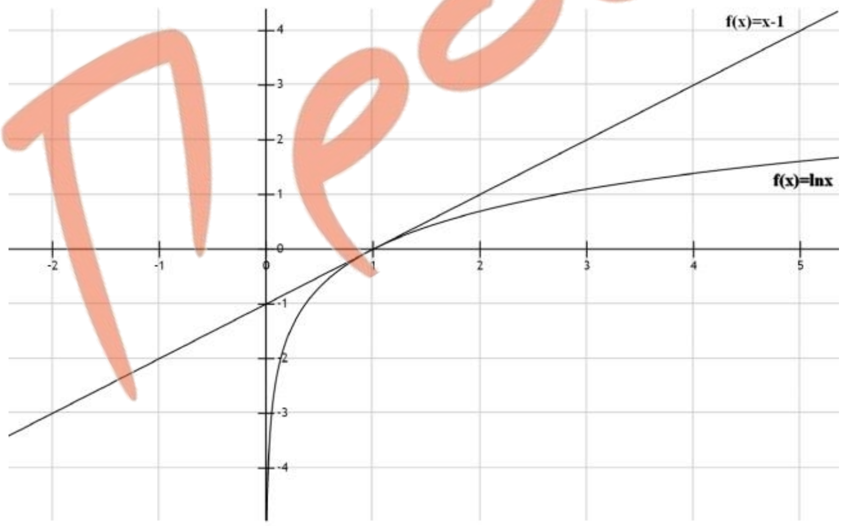
$$\frac{x\ln x - x + 1}{x-1} - \ln x \le \frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1} - \ln x \le \frac{x-1}{2} - \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{\ln x - x + 1}{x-1} \le \frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1} - \ln x \le \frac{x-1}{2} - \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{\ln x - x + 1}{x-1} \le \int_1^x \frac{f(t) - \ln x}{x-1} dt \le \frac{x-1}{2} - \ln x \ (1)$$

όμως $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\ln x - x + 1)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{2} - \ln x\right) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Κ°.Π~°.}}{\Rightarrow} \int_1^x \frac{f(t) - \ln x}{x-1} dt = 0$

Δ4.



Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται μεταξύ των $y = lnx$ και $y = x - 1$ για κάθε $x \ge 1$ οπότε θα ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \ge 1$.

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι $E = \int_1^e f(x)dx > 0$

Από το ερώτημα Δ2 έχουμε $\int_1^x f(t)dt \le \frac{(x-1)^2}{2}$ για κάθε $x \ge 1$.

Για $x = e$ έχουμε $\int_1^e f(t)dt \le \frac{(e-1)^2}{2} \Rightarrow E \le \frac{(e-1)^2}{2} \Rightarrow 2E \le (e-1)^2 \overset{E>0}{\Rightarrow} \sqrt{2E} \le e - 1$.

Δ5.

Αφού η f(x) έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = {}^{a}x +$ τότε θα ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = ª \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - ª x\right) = \quad \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα γίνεται:

$$(x-1) - \frac{(ª-1)x^2}{4} = f(x) \Leftrightarrow 4\quad (x-1) - (ª-1)x^2 = 4f(x) \Leftrightarrow 4f(x) - 4\quad (x-1) + (ª-1)x^2 = 0$$

θέτω $h(x) = 4f(x) - 4\quad (x-1) + (ª-1)x^2$

$h(1) = 4\,f(1) - 4\quad (1-1) + (ª-1)1^2 = ª - 1 \le 0 \Rightarrow \boxed{h(1) \le 0}$ διότι:

$\ln x \le f(x) \le x - 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le 1 - \frac{1}{x} \overset{\lim_{x\to\infty}}{\Rightarrow} 0 \le ª \le 1$ αφού:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = ª \text{ ,~®ό²¦¬ ~±ύ«®²μ²¦} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

$h(2) = 4f(2) - 4\quad (2-1) + 4(ª-1) = 4(f(2) - \quad + ª - 1) > 0 \Rightarrow \boxed{h(2) > 0}$ διότι:

$\ln 2 \le f(2) \le 2 - 1 \Rightarrow f(2) > 0$ (1)
$0 \le ª \le 1 \Rightarrow ª \ge 0$ (2) από πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει το παραπάνω.
$\quad \le -1 \Rightarrow -1 - \quad \ge 0$ (3)

Διακρίνω περιπτώσεις:

<u>Α) Αν h(1)=0</u>

τότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση , την x=1.

<u>Β) Αν h(1)<0</u>

τότε από Θ.Bolzano η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση στο (1,2).

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση