ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Διατυπώστε το θεώρημα Rolle. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία; (3)

Α2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι για κάθε αριθμό n που βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=n$. (5)

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνάρτηση ένα προς ένα (1-1) ; (2)

Α4. Έστω συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν:

α) Οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και

β) $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$ (5)

Α5. Σωστό ή λάθος;

1. Οι συναρτήσεις $f(x)=x$ και $g(x)=e^{\ln x}$ είναι ίσες.
2. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x))$ τότε υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$
3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της Α , τότε θα ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε x στο Α
4. Κάθε τοπικό μέγιστο της f είναι πάντοτε μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο της f.
5. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

(2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη , και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

(1) $f(x)+2-2x=f'(x)$ και

(2) $f''(x)+f(x)=2x+6e^x$

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=2x+3e^x$ (5)

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών. (6)

Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. (3)

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο πραγματική λύση (4)

Β5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο της με τετμημένη 0. (4)

Β6. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζουν με τον άξονα x'x οξεία γωνία. (3)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$, για την οποία ισχύει η σχέση

$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1).

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right), x \in R.$ (5)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή. (5)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2016 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (5)

Γ4. Να δείξετε ότι $f'(x) + f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R.$ (5)

Γ5. Ένα υλικό σημείο ξεκινά από την χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ με $x \le x_o$, $x = x(t), y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης , ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης. (5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ παραγωγίσιμη ώστε:

(1) Η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(1,3)

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(5f(x)+2f(x+1)\right) = 29$ και

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(-3f(x)+4f(x-1)\right) = 14$

Δ1. Να αποδειχθεί ότι $f(2)=5 \ \kappa\alpha\iota \ f(3)=2$ (5)

Δ2. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη . (5)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει x_o ώστε $f'(x_0)=0$ (5)

Δ4. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει ξ ώστε $f''(\xi) < 0$ (5)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (2,3)$ με $x_1 < x_2$ ώστε $\dfrac{2}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = -1$ (5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 246
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 194
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 151
Α4. Σχολικό βιβλίο σελ. 251

Α5.
α -> Λάθος
β -> Λάθος
γ -> Λάθος
δ -> Λάθος
ε -> Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $f'(x)-2=f''(x)$ η οποία λόγω της (2) γράφεται:
$f'(x)-2+f(x)=2x+6e^x \Leftrightarrow f'(x)+f(x)=2x+6e^x-2$ (3)
Από την (1) και την (3) λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $f(x)=3e^x+2x$

Β2.
Έχουμε $f'(x)=3e^x+2>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Επειδή η f γν. αύξουσα και συνεχείς το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3e^x+2x\right)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^x+2x\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$

Β3.
Επειδή η f γν. αύξουσα στο π.ο της θα είναι και "1-1" άρα και αντιστρέψιμη.

Β4.
Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ άρα υπάρχει $x_1<0$ τέτοιο ώστε $f(x_1)<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα υπάρχει $x_2>0$ τέτοιο ώστε $f(x_2)>0$
Η f συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $f(x_1)f(x_2)<0$ άρα από το Θ.Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (x_1,x_2) η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως μονότονη.

Β5.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, στο σημείο με τετμημένη 0 είναι:
$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-3=5x \Leftrightarrow y=5x+3$

Β6.
Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ τυχαίο σημείο της f τότε: $f'(x_0)=3e^{x_0}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα οι εφαπτόμενες της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζουν με τον άξονα x'x οξεία γωνία.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(1) \Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \left[e^{f(x)} - x\right]^2 = x^2 + 1\ (2)\ \Rightarrow \left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{x^2+1}\ (3).$

Θεωρώ $k(x) = e^{f(x)} - x\ , x \in \mathbb{R}$ συνεχής ως άθροισμα συωεχών συναρτήσεων.

$$k(x) = 0 \Rightarrow k^2(x) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x^2 + 1 = 0, \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$$

Άρα: $k(x) \neq 0$, για κάθε x є ℝ.

Από Συνέπειες Θ. Bolzano η k(x) διατηρεί πρόσημο. Όμως k(0)=1. Άρα: $k(x) > 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - x > 0$, για κάθε x є ℝ.

$$(3) \Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, για κάθε x є ℝ, αφού $x + \sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2+1} > -x\ (*)$$

Εάν x>0: η (*) ισχύει.

Εάν x=0: (*)⇒1>0 ισχύει.

Εάν x<0: $(*) \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$, ισχύει.

Γ2. Για κάθε x є A_f, -x є A_f :

$f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} =$
$\ln\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = -f(x).$

Άρα η f περιττή.

Γ3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$, $\acute{o}\pi o\upsilon\ u = \sqrt{x^2+1} + x$,

Και $u_0 = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} + x) = \cdots = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty$ όπου:

$u_{o'} = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \cdots = 0.$

Από Συνέπειες Θ.Bolzano το σύνολο τιμών της f είναι το ℝ.

Από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 є ℝ τέτοιο ώστε : $f(x_0) = \ln 2016$.

Όμως : $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \cdots = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, για κάθε x є ℝ.

Άρα η f γν. αύξουσα στο π.ορισμού της.

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό x_0 є ℝ ώστε: $f(x_0) = \ln 2016 \Rightarrow e^{f(x_0)} = 2016$.

Γ4. $f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \cdots = -\frac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) + f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Αφού: $\chi^2 - \chi + 1 > 0$, για κάθε x є ℝ (Δ<0 και α>0)

$x^2 + 1 > 0$, για κάθε x є ℝ και $\sqrt{x^2+1} > 0$, για κάθε x є ℝ.

Γ5. $y(t) = \ln\left(\sqrt{x^2(t)+1} + x(t)\right)$. Άρα:

$$y'(t) = \frac{x(t)\cdot x'(t)}{\left(\sqrt{x^2(t)+1}+x(t)\right)\cdot\sqrt{x^2+1}} + x'(t) \xRightarrow{y'(t)=x'(t)} x(t)\cdot x'(t) = 0 \xRightarrow{x'(t)\neq 0} x(t) = 0\,.$$

Άρα το σημείο είναι το (0,0).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο 2 και 3 άρα $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ και $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ επίσης $\lim_{x\to 2} f(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 3} f(u) = f(3)$ και $\lim_{x\to 3} f(x-1) \overset{u=x-1}{=} \lim_{u\to 2} f(u) = f(2)$. Έχουμε $\lim_{x\to 2}(5f(x)+2f(x+1)) = 29 \Leftrightarrow 5\lim_{x\to 2} f(x) + 2\lim_{x\to 2} f(x+1) = 29 \Leftrightarrow 5f(2)+2f(3) = 29$ όμοια $\lim_{x\to 3}(-3f(x)+4f(x-1)) = 14 \Leftrightarrow -3\lim_{x\to 3} f(x) + 4\lim_{x\to 3} f(x-1) = 14 \Leftrightarrow$ $-3f(3)+4f(2) = 14$. Λύνουμε το σύστημα και έχουμε το ζητούμενο.

Δ2. Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε $\forall x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άτοπο γιατί $2<3$ αλλά $f(2) > f(3)$. Όμοια αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε $\forall x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άτοπο γιατί $1<2$ όμως $f(1) < f(2)$ (η f περνά από το σημείο A(1,3) άρα $f(1) = 3$). Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη .

Δ3. Ισχύει ότι $f(3) < 3 < f(2)$ και η f συνεχής στο [2,3] άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $k \in (2,3)$ ώστε $f(k) = 3$. Στο διάστημα $[1,k]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ROLLE άρα υπάρχει $x_o \in (1,k)$ ώστε $f'(x_o) = 0$.

Δ4. Εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ βρίσκουμε $\rho_1 \in (1,2)$ και $\rho_2 \in (2,3)$ ώστε $f'(\rho_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2$ και $f'(\rho_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = -3$. Εφαρμόζοντας για την f' θεώρημα μέσης τιμής στο $[\rho_1,\rho_2]$ βρίσκουμε $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\rho_2)-f'(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1} = \frac{-5}{\rho_2-\rho_1} < 0$

Δ5. Εφαρμόζουμε δύο θεωρήματα μέσης τιμής στα διαστήματα $[2,k]$ και $[k,3]$ και βρίσκουμε $x_1 \in (2,k)$ και $x_2 \in (k,3)$ με $f'(x_1) = \frac{f(k)-f(2)}{k-2} = \frac{-2}{k-2}$ και $f'(x_2) = \frac{f(3)-f(k)}{3-k} = \frac{-1}{3-k}$ άρα έχουμε τελικά

$$\frac{2}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2}{\frac{-2}{k-2}} + \frac{1}{\frac{-1}{3-k}} = -k+2-3+k = -1\,.$$