# ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2016

**ΘΕΜΑ Α** (5x5=25 Μονάδες)

Α1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ , η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ , έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

Α2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ , όπου Α≠0 ή Β≠0, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

Α3. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ , μη παράλληλα στον άξονα y'y , με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ *και* $\lambda_2$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Α4. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) , Β(-1,3) και Γ(4,2) , καθώς και οι ευθείες $(\varepsilon): 3x - 4y + 10 = 0$ και $(\eta): 6x + 8y - 10 = 0$ Αντιστοιχίστε κάθε ποσότητα της στήλης Α με την αντίστοιχη τιμή της στήλης Β

| Στήλη Α | |
|---|---|
| | |
| 1 | (ΒΓ) |
| 2 | (ΑΒΓ) |
| 3 | d(Α,ε) |
| 4 | d(Γ,η) |
| 5 | $\sigma\upsilon\nu(\varepsilon, \eta)$ |
| | |

| Στήλη Β | |
|---|---|
| Α | $3/2$ |
| Β | 1 |
| Γ | 3 |
| Δ | $\sqrt{5}$ |
| Ε | 5 |
| Ζ | $\sqrt{26}$ |
| Η | Άλλο |

**Α5. Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) ;**

1. Οι ευθείες (ε) 2x – 3y = 1 και (η) 3x + 2y = 8 τέμνονται στο Α(2,1).
2. Η ευθεία (ε) 2x – y + 8 = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2,4)$ .
3. Η απόσταση της ευθείας 4x-3y+5=0 από την αρχή των αξόνων είναι 1.
4. Η ευθεία $Bx + Ay + \Gamma = 0$ με $B \neq 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$
5. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα σημεία Α(-2,3) , Β(1,6) και Γ(2,4) ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Β1. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 4)
Β2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ΑΒ και ΒΓ. (Μονάδες 6)
Β3. Να βρείτε την προβολή Α' του σημείου Α στην ΒΓ. (Μονάδες 6)
Β4. Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς τη ΒΓ. (Μονάδες 4)
Β5. Να βρείτε την απόσταση του Γ από τη ΒΑ. (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2+2\lambda-3)x+(\lambda+3)y+2\lambda^2-18=0\,,\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία (ε). (Μονάδες 4)
Γ2. Να βρεθεί ο λ ώστε η (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 4)
Γ3. Να βρεθεί ο λ ώστε η (ε) να είναι παράλληλη προς τον άξονα y'y. (Μονάδες 4)
Γ4. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ. (Μονάδες 6)
Γ5. Αν το σημείο Κ είναι το κέντρο ενός τετραγώνου του οποίου η μία πλευρά ανήκει στην ευθεία (η): 3x+4y=0, να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου. (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και η εξίσωση:

$$6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot x-4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot y-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \quad (1)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε. (Μονάδες 4)
Δ2. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(1,-1), να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. (Μονάδες 3)
Δ3. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Β(3,2), να βρείτε:

α) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 4)

β) Την απόσταση του σημείου $M\left(\frac{|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2-|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|},-1\right)$ από την ευθεία ε, αφού πρώτα γράψετε το σημείο Μ σε απλούστερη μορφή. (Μονάδες 5)

Δ4. Δίνεται η εξίσωση $9x^2-16y^2-6x+1=0$ (2) . Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία, να δείξετε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει δύο ευθείες (ζ) και (η) της μορφής (1) και να βρεθεί η τιμή της γωνίας $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ για την οποία η (1) ταυτίζεται με τις ευθείες (ζ) και (η). Τέλος, να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών (ζ) και (η). (Μονάδες 9)

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1.Σχολικό, σελ. 60-61.

Α2. Σχολικό, σελ.67.

Α3. Σχολικό, σελ. 43.

Α4. 1.→Ζ , 2.→Α , 3.→Β , 4.→5 , 5.→Η

Α5. 1.→Σ , 2.→Λ , 3.→Σ , 4.→Λ , 5.→Λ

Θέμα Β

Β1. $\overrightarrow{AB} = (3,3)\,, \overrightarrow{A\Gamma} = (4,1)\,, \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9.$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|-9| = \frac{9}{2}\ \tau.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

Β2. $\lambda_{AB} = 1.\ \ (\varepsilon_{AB}): y - y_B = \lambda_{AB} \cdot (x - x_B) \Rightarrow y - 6 = x - 1 \Rightarrow x - y + 5 = 0.$

$\lambda_{B\Gamma} = -2. (\varepsilon_{B\Gamma}): y - y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma} \cdot (x - x_\Gamma) \Rightarrow y = -2x + 8.$

Β3. $\lambda_{AA'} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{AA'} \cdot (-2) = -1 \Rightarrow \lambda_{AA'} = \frac{1}{2}.$

ΑΑ΄: $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4.$

Το Α΄ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΑ΄και ΒΓ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 4 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 4 = -2x + 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5} \quad \kappa\alpha\iota\ y = \frac{24}{5}$$

Άρα $A'\left(\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right).$

Β4. Έστω Δ το συμμετρικό σημείο του Α ως προς τη ΒΓ.

Α΄ μέσο του ΑΔ. Άρα: $\begin{cases} \frac{8}{5} = \frac{x_A + x_\Delta}{2} \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{24}{5} = \frac{y_A + y_\Delta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_\Delta = \frac{26}{5} \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Delta = \frac{33}{5} \end{cases}$. Άρα: $\Delta\left(\frac{26}{5}, \frac{33}{5}\right).$

Β5. $d(\Gamma, BA) = \frac{|2\cdot 1 + 4\cdot(-1) + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Θέμα Γ

Γ1. Δεν παριστάνει ευθεία όταν: $\begin{cases} A = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 1 \\ \kappa\alpha\iota \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -3.$

Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε λ ϵℝ-{-3}.

Γ2. Πρέπει: $2\lambda^2 - 18 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3 \rightarrow \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota. \text{Άρα}: \lambda = 3\,.$

Γ3. Πρέπει: λ+3=0⇒λ=-3 αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει λ ώστε η ε να είναι παράλληλη στον y΄y.

Γ4. $(1) \Rightarrow \lambda^2 x + 2\lambda x - 3x + \lambda y + 3y + 2\lambda^2 - 18 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^2(x+2) + (2x+y)\lambda + (-3x+3y-18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 2x+y=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ -3x+3y-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \kappa\alpha\iota \\ y=4 \end{cases}.$$ Άρα:

K(-2,4).

Γ5. $d(K,\eta) = \frac{|3\cdot(-2)+4\cdot 4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2$

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου.

$\alpha = 2\cdot d(K,\eta) \Rightarrow \alpha = 4$. Άρα: $E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = \alpha^2 = 16\ \tau.\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$.

Θέμα Δ

Δ1. $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$. Άρα: $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}| \neq 0$. Δηλαδή $-4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| = 0$. Άρα η (1) παριστάνει ευθεία ε.

Δ2. $(1) \Rightarrow 6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

$\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Δ3.α) $(1) \Rightarrow 6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot 3 - 4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot 2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Rightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 8|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

$\Rightarrow 2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60°$.

β) $\frac{|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{8\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{8|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$

Άρα: Μ(4,-1).

ε: $(1) \Rightarrow 6|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})x - 4|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|y - 2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$

$$\xRightarrow{|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|\neq 0} 3x - 4y - 1 = 0$$

Άρα: $d(M,\varepsilon) = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$

Δ4. $(2) \Rightarrow (3x-1)^2 - (4y)^2 = 0 \Rightarrow (3x-1-4y)\cdot(3x-1+4y) = 0 \Rightarrow (\zeta): 3x-4y-1 = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ (\eta): 3x+4y-1 = 0$

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} \xRightarrow{(\varepsilon),(\eta)} \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60°$$

$\overrightarrow{\delta_1} // \eta$ άρα $\overrightarrow{\delta_1} = (B,-A) = (-4,-3)\overrightarrow{\delta_2} // \zeta$, άρα: $\overrightarrow{\delta_2} = (4,-3)$

$$\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{\delta_1},\overrightarrow{\delta_2}) = \frac{\overrightarrow{\delta_1}\cdot\overrightarrow{\delta_2}}{|\overrightarrow{\delta_1}|\cdot|\overrightarrow{\delta_2}|} = \frac{-16+9}{5\cdot 5} = -\frac{7}{25}$$

Άρα το συνημίτονο της οξείας γωνίας των ε, ζ είναι $\frac{7}{25}$.