ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 22 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2015

Θέμα Α

Α1. Σωστό ή Λάθος; Εξετάστε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (10Μ)

1. Τα $\vec{\alpha}=(-3,4)$ και $\vec{\beta}=(3,-4)$ είναι παράλληλα
2. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$
3. Το διάνυσμα $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι μοναδιαίο
4. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα
5. Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$
6. Το συμμετρικό του Α(-2,4) προς το Μ(2,3) είναι το Β(6,2)
7. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$
8. Αν $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{B\Gamma}$ τότε τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά
9. Το γινόμενο $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ είναι αριθμός.
10. Αν $\vec{a}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Α2. Δώστε τον ορισμό και την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (4Μ)

Α3. Να αποδείξετε ότι αν το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ τότε θα ισχύει:

α) $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ για οποιοδήποτε σημείο Ο (4Μ) και

β) $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ και $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ (4Μ)

Α4. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta}$ για τα οποία ορίζονται συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\vec{a}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2$ (3Μ)

Θέμα Β

Β1. Αν τα σημεία Α(4,2), Β(8,5) και Γ(2,-3) είναι κορυφές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
ii) τις συντεταγμένες των σημείων Ο και Δ.
iii) τα μήκη των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. (3+4+4=11Μ)

Β2. Δίνονται τα σημεία: Α(3,2), Β(7,4) και Γ (5, λ). Να βρείτε το λ, ώστε:

i) Το $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}//x'x$

ii) Τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

iii) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ να είναι κάθετα. (4+5+5=14Μ)

Θέμα Γ

Γ1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ τότε

i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$\vec{a}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{a}^{\,2}+\vec{\beta}^{\,2}$, $(\vec{a}+\vec{\beta})^2$, $|\vec{a}+\vec{\beta}|$ και $(|\vec{a}|+|\vec{\beta}|)^2$

ii) Αν $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ να βρείτε τη γωνία των $\vec{u},\vec{v}$

(5+10=15Μ)

Γ2) Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$.Αν η εξίσωση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|x^2+2|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot x+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=0$ έχει μοναδική λύση, να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$. (10Μ)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ όπου $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=\vec{\beta}$. Θεωρούμε τα σημεία Ε,Ζ στις ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε $\overrightarrow{\text{ΑΕ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΖ}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΖ}}=\frac{1}{4}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\overrightarrow{\text{ΕΖ}}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$

ii) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ και να δείξετε ότι τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακά.

iii) Αν Σ σημείο της ΑΒ ώστε $\overrightarrow{\text{ΒΣ}}=2\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$, και Ρ το συμμετρικό του Ζ ως προς το κέντρο Ο του ΑΒΓΔ, να δείξετε ότι το τμήμα ΔΣ διέρχεται από το σημείο Ρ.

iv) Αν Η είναι το σημείο που η ΔΣ τέμνει την ΒΓ , να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(4+4+4+4=16Μ)

Δ2. Οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(\lambda^2-5\lambda+4)x-7=0 \quad (1)$$

και οι τεταγμένες τους είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(\lambda^2-3\lambda+6)x-5=0 \quad (2)$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το ΑΒ έχει μέσο το σημείο Μ(-1,2)

(9Μ)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

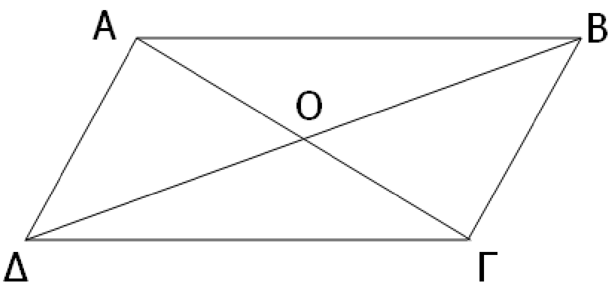
Α1.

1 -> Σ
2 -> Λ
3 -> Σ
4 -> Σ
5 -> Λ
6 -> Σ
7 -> Λ
8 -> Σ
9 -> Λ
10 -> Σ

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41 και 42
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 25 και 33
Α4. Σχολικό βιβλίο σελ. 38

ΘΕΜΑ Β

Β1.



i)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\mathrm{x}_2 - x_1, \mathrm{y}_2 - y_1) = (4,3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = (-6,-8)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-2,-5)$$

ii) Ο μέσο του ΑΓ οπότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ y_0 = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2} = \dfrac{2-3}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Άρα } O\left(3,-\frac{1}{2}\right)$$

Ο μέσο και του ΒΔ άρα

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_B+x_\Delta}{2}\Rightarrow 3=\dfrac{8+x_\Delta}{2}\Rightarrow x_\Delta=-2 \\ y_0=\dfrac{y_B+y_\Delta}{2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}=\dfrac{5+y_\Delta}{2}\Rightarrow y_\Delta=-6 \end{cases}$$ Άρα $\Delta(-2,-6)$

iii) $(\mathrm{A\Gamma})=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(2-4\right)^2+\left(-3-2\right)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$(\mathrm{B\Delta})=\sqrt{\left(-2-8\right)^2+\left(-6-5\right)^2}=\sqrt{100+121}=\sqrt{221}$

B2.

i) $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(-2,\lambda-4)$

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}//x'x\Rightarrow y=0\Rightarrow \lambda-4=0\Rightarrow\lambda=4$

ii) Α,Β,Γ συνευθειακά

$\Rightarrow\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 4\lambda-8-4=0\Rightarrow 4\lambda=12\Rightarrow\lambda=3$

iii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,2)$

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(-2,\lambda-4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow -8+2\lambda-8=0\Rightarrow\lambda=8$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i)

$\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=2$

$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2=2+8=10$

$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2+8+4=14$

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=14\Rightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{14}$

$\left(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\right)^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2=2+2\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}+8=2+8+8=18$

ii)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=4-2-8=-6$

$|\vec{u}|^2=|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=4|\vec{\alpha}|^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=8+8+8=24\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{24}$

$|\vec{v}|^2=|\vec{a}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=2-4+8=6\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{6}$

οπότε $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-6}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{-6}{2\cdot6}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=120^o\ \left(\acute{\eta}\ \dfrac{2\pi}{3}rad\right)$

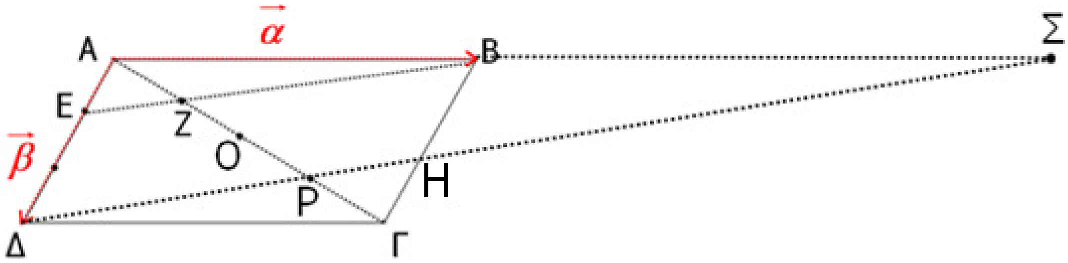
Γ2.
Για να έχει το τριώνυμο μοναδική λύση πρέπει :

$$\Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Rightarrow 4\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 - 4\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 0 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Rightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



i) Για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ οπότε:

$$\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EZ}} = \overrightarrow{\mathrm{AZ}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) - \frac{1}{3}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} + \frac{1}{4}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha} - \frac{1}{12}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$$

ii) $\overrightarrow{\mathrm{EB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$

Παρατηρώ ότι $\overrightarrow{\mathrm{EZ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ άρα τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακά.

iii) $\overrightarrow{\Delta\Sigma} = \overrightarrow{\Delta\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{B}\Sigma} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Αφού το Ρ είναι συμμετρικό του Ζ ως προς Ο θα είναι

$\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ οπότε

$$\overrightarrow{\Delta\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{3}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) - \vec{\beta} = \frac{3}{4}\vec{\alpha} - \frac{1}{4}\vec{\beta} = \frac{1}{4}(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

Δηλαδή $\overrightarrow{\Delta\mathrm{P}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Delta\Sigma}$ Άρα τα σημεία Δ,Ρ,Σ είναι συνευθειακά.

iv) $\overrightarrow{\mathrm{E\Delta}} // \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ γιατι βρίσκονται σε απέναντι πλευρές παρ/μου ΑΒΓΔ

$\overrightarrow{\Delta\mathrm{H}} // \overrightarrow{\mathrm{EB}}$ γιατί $\overrightarrow{\Delta\Sigma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 3\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right) = 3\overrightarrow{\mathrm{EB}} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta\Sigma} // \overrightarrow{\mathrm{EB}} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta\mathrm{H}} // \overrightarrow{\mathrm{EB}}$

Άρα το τετράπλευρο ΕΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες ανά δύο

Δ2.
Οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(\lambda^2-5\lambda+4)x-7=0$$

Από τύπους Vieta θα έχουμε $x_1+\mathrm{x}_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}\Rightarrow x_1+x_2=\lambda^2-5\lambda+4$ (3)

Επειδή Μ μέσο ΑΒ θα ισχύει: $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow -1=\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow x_1+x_2=-2$ (4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow \lambda^2-5\lambda+4=-2\Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0\Rightarrow \boxed{\lambda=2\ \acute{\eta}\ \lambda=3}$

Με τον ίδιο τρόπο:
Οι τεταγμένες των σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-(\lambda^2-3\lambda+6)x-5=0$$

Από τύπους Vieta θα έχουμε $x_1+\mathrm{x}_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}\Rightarrow x_1+x_2=\lambda^2-3\lambda+6$ (5)

Επειδή Μ μέσο ΑΒ θα ισχύει: $y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}\Rightarrow 2=\dfrac{y_1+y_2}{2}\Rightarrow y_1+y_2=4$ (6)

Από (5) και (6) $\Rightarrow \lambda^2-3\lambda+6=4\Rightarrow \lambda^2-5\lambda+2=0\Rightarrow \boxed{\lambda=1\ \acute{\eta}\ \lambda=2}$

Άρα λ = 2 (κοινή λύση που ισχύει ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες τόσο για τις τετμημένες όσο και για τις τεταγμένες)