<u>ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΠΡΟΟΔΟΣ»</u>

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ»
ΚΥΡΙΑΚΗ 1 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

<u>ΘΕΜΑΤΑ</u>

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (7)

Β. 1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. (4)
2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]; (4)

Γ. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος. (10)

1. Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει ότι: $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$
2. Αν η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι άρτια, τότε η f δεν είναι 1-1
3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει πάντα ότι: $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$
4. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και x_1, x_2 είναι δύο οποιεσδήποτε ρίζες της f στο Δ, με $x_1 < x_2$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα (x_1, x_2)
5. Αν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$,τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = ln(x-1)$ και $f(x) = 2015 + |\ln(x-1)|$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g και η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο της $M(2, g(2))$. (4)

Β. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$. (2)

Γ. Να βρεθεί η $f'(x)$. (9)

Δ. Αν £ : $y = k$ ευθεία με $k > 2015$ τότε :

1. Να αποδειχθεί ότι η ε τέμνει την C_f σε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. (5)
2. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες της C_f στα Α και Β τέμνονται κάθετα . (5)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,1)\to R$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα με τις ιδιότητες $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ και $2¦«(x-1)\le (x-1)f(x)\le x^2-1$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,f(0))$. (4)

Β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών $g((0,1))$ για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x-3$. (7)

Γ. Να αποδειχθεί ότι η C_h με $h(x)=e^{f(x)-3}$ τέμνει την διχοτόμο του 1ο τεταρτημόριου σε ένα και μόνο σημείο . (8)

Δ. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών τις εξίσωσης $xe^{a+3}=e^{f(x)}$ στο (0,1) για τις διάφορες τιμές του α . (6)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:R\to(-2,+\infty)$ και $g:R\to R^*$ συνεχείς και ένα προς ένα . Επίσης η εξίσωση $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ (1) έχει στο C τέσσερεις μη πραγματικές ρίζες δύο εκ των οποίων είναι οι $z_1=f(a)+g(\ \ )i$ και $z_2=g(a)+f(\ \ )i$ όπου $a<\ \ $.

Α. Να λυθεί η εξίσωση (1) . (6)

Β. Να αποδειχθεί ότι $f(\ \ )=-1$, $g(\ \ )=2$ και ότι οι C_f και C_g τέμνονται στο $M(a,1)$. (6)

Γ. Να αποδειχθεί οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες και ότι το Μ είναι το μοναδικό σημείο τομής των C_f και C_g. (4)

Δ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα . (4)

Ε. Να αποδειχθεί ότι το $° =\frac{g^{-1}(\frac{3}{2})+f^{-1}(0)}{2}$ ανήκει στο $(a,\ \ )$. (5)

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

(1Α) Σχολικό βιβλίο σελ.217

(1Β) 1. Σχολικό βιβλίο σελ.194
2. Σχολικό βιβλίο σελ.191

(1Γ) 1-Λ
2-Σ
3-Λ
4-Λ
5-Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

(2Α)

$g(x) = ln(x-1)$

Πρέπει $x-1>0 \Rightarrow x>1$ άρα $A_g = (1,+\infty)$

Η g είναι συνεχής στο $A_g = (1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{1}{x-1}\left(x-1\right)' = \frac{1}{x-1}.$$

Έτσι η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ(2,g(2)) είναι η:

$y-g(2) = g'(2)(x-2) \Rightarrow y-0 = 1(x-2) \Rightarrow y = x-2$

(2Β)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} \overset{®\sim°/«¦}{=} g'(2) = 1$$

(2Γ)

$$f(x) = 2015 + |\ln(x-1)| = \begin{cases} 2015+\ln(x-1) & \sim\neg\ \ln(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \\ 2015-\ln(x-1) & \sim\neg\ \ln(x-1)<0 \Rightarrow 1<x<2 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(1,2\right)$ ©~§ $\left(2,+\infty\right)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζω αν είναι συνεχής στο 2:

Πράγματι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 2015$ οπότε είναι συνεχής στο 2.

Άρα η f είναι συνεχής.

Αν x>2 η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Αν 1<x<2 η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

Εξετάζω αν είναι παραγωγίσιμη στο 2:

Όμως $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$ και $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\dfrac{-\ln(x-1)}{x-2} = -1$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Συνεπώς έχουμε:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{~¬}\ x>2\\ -\dfrac{1}{x-1} & \text{~¬}\ 1<x<2\end{cases}$$

(2Δ$_1$)

Αν £ : $y=k$ ευθεία με $k>2015$ τότε διακρίνω τις παρακατω περιπτώσεις:

Α) Αν x>2 τότε $f(x)=k\Rightarrow \ln(x-1)+2015=k\Rightarrow x-1=e^{k-2015}\Rightarrow x=1+e^{k-2015}>2$

Τέμνονται στο σημείο $A(1+e^{k-2015},k)$

Β) Αν1<x<2 τότε $f(x)=k\Rightarrow -\ln(x-1)+2015=k\Rightarrow x-1=e^{2015-k}\Rightarrow x=1+e^{2015-k}<2$

Τέμνονται στο σημείο $B(1+e^{2015-k},k)$

Άρα η C$_f$ τέμνει την y=k σε 2 σημεία.

(2Δ$_2$)

Η εφαπτομένη στο Α έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$ª_1=f'(1+e^{k-2015})=\frac{1}{1+e^{k-2015}-1}=\frac{1}{e^{k-2015}}=\frac{e^{2015}}{e^k}$$

Η εφαπτομένη στο Β έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$ª_2=f'(1+e^{2015-k})=\frac{-1}{1+e^{2015-k}-1}=\frac{-1}{e^{2015-k}}=-\frac{e^k}{e^{2015}}$$

Οπότε $ª_1\cdot ª_2=\left(\frac{e^{2015}}{e^k}\right)\cdot\left(-\frac{e^k}{e^{2015}}\right)=-1$ άρα οι εφαπτόμενες τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ 3^o

(3Α)

Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-5}{x}$ με $\lim_{x\to 0} g(x)=3$

Τότε $f(x)=xg(x)+5\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+5\right)=5\overset{\pm^3\neg£¡ή\text{s}}{\Rightarrow} f(0)=5$

Και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f'(0)=3$

Έτσι η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ(0,f(0)) είναι η:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-5=3x\Rightarrow y=3x+5$

(3Β)

Είναι $g(x)=f(x)-\ln x-3$ με πεδίο ορισμού Α=(0,1)

Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ «£ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ (1) (αφού η f είναι γν.φθίνουσα)

Επίσης $x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2\Rightarrow -\ln x_1-3>-\ln x_2-3$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1).

Η g είναι λοιπόν συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Α=(0,1) οπότε από συνέπειες του θ.Bolzano θα έχει σύνολο τιμών το διάστημα $g\left((0,1)\right)=\left(\lim_{x\to 1^-} g(x),\lim_{x\to 0^+} g(x)\right)=\left(-1,+\infty\right)$ διότι:

$$2¦«(x-1)\le (x-1)f(x)\le x^2-1\Rightarrow \frac{2¦«(x-1)}{(x-1)}\le f(x)\le x+1 \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

$\lim_{x\to1^-}\frac{2¦«(x-1)}{(x-1)} \overset{u=x-1}{=} \lim_{u\to0^-}\frac{2¦«u}{u}=2$ και $\lim_{x\to0^+}(x+1)=2$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x\to1^-}f(x)=2$.

Έτσι θα έχουμε $\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\left(f(x)-\ln x-3\right)=2-3=-1$

Άκόμα θα είναι $\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(f(x)-\ln x-3\right)=+\infty$ αφού $\lim_{x\to0^+}f(x)\overset{±³¬}{=}f(0)=5$ ©~§ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

(3Γ)

$h(x)=x \Leftrightarrow e^{f(x)-3}=x \Leftrightarrow f(x)-3=\ln x \Leftrightarrow g(x)=0$

Επειδή $0\in g\left((0,1)\right)$ η εξίσωση $g(x)=0$ θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1).

Και επειδή η g είναι γν.φθίνουσα η ρίζα θα είναι μοναδική.

Άρα και η ισοδύναμη εξίσωση $h(x)=x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο στο (0,1) οπότε η h(x) τέμνει την y=x σε ένα και μόνο σημείο.

(3Δ)

$xe^{a+3}=e^{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(xe^{a+3}\right) \Leftrightarrow f(x)=\ln x+\ln e^{a+3} \Leftrightarrow f(x)=\ln x+a+3 \Leftrightarrow g(x)=a$ είναι $g\left((0,1)\right)=\left(-1,+\infty\right)$ οπότε διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

Α) Αν $a\le-1$ τότε $a\notin g\left((0,1)\right)$ άρα η εξίσωση $g(x)=a$ δεν έχει ρίζες στο (0,1)

Β) Αν α>1 τότε $a\in g\left((0,1)\right)$ οπότε η εξίσωση $g(x)=a$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) και επειδή είναι γνησίως μονότονη , η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4^{o}

(4Α)

Ά τρόπος

Αφού το πολυώνυμο έχει μιγαδικές λύσεις θα γράφεται ως γινόμενο 2 τριωνύμων της μορφής $\left(x^2-Sx+P\right)$ με αρνητική διακρίνουσα . Οπότε σκοπός είναι να γίνει μια τέτοια παραγοντοποίηση. Οι λύσεις δίνονται όμως στο στο Β ερώτημα και είναι $z=1\pm i$ *ή* $z=1\pm2i$ οπότε για τα τριώνυμα αυτά μπορούμε να προσδιορίσουμε το S και το P.

Προσοχή: Δεν χρησιμοποιούμε τις λύσεις του Β ερωτήματος απλά με την βοήθεια των ριζών αυτών κάνουμε την παραγοντοποίηση:

$x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0 \Rightarrow$

$(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)=0 \Rightarrow$

$x^2-2x+2=0$ *ή* $x^2-2x+5=0 \Rightarrow$

$z=1\pm i$ *ή* $z=1\pm2i$

Β' τρόπος:

Αφού το πολυώνυμο έχει μιγαδικές λύσεις θα γράφεται ως γινόμενο 2 τριωνύμων της με αρνητική διακρίνουσα δηλαδή:

$(x^2+©x+ª)(x^2+«x+¬)=0 \Rightarrow$

$x^4+(«+©)x^3+(¬+©«+ª)x^2+(©¬+ª«)x+ª¬=0$

Για να ταυτίζεται με το αρχικό πολυώνυμο πρέπει

$$\begin{cases} \text{«} + \text{©} = -4 \\ \text{¬} + \text{©«} + \text{ª} = 11 \\ \text{©¬} + \text{ª«} = -14 \\ \text{ª¬} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{©} = -2 \\ \text{ª} = 2 \\ \text{«} = -2 \\ \text{¬} = 5 \end{cases}$$ άρα το αρχικό πολυώνυμο γράφεται:

$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 5) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ ή $x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow$

$z = 1 \pm i$ ή $z = 1 \pm 2i$

(4Β)

Οι ρίζες είναι $z_1 = f(a) + g(\ )i$ και $z_2 = g(a) + f(\ )i$ όπου $a <\ $. Από το Α ερώτημα βρήκαμε ότι είναι $z = 1 \pm i$ ή $z = 1 \pm 2i$

Άρα f(α)=g(α)=1 οπότε οι οι C_f και C_g τέμνονται στο $M(a,1)$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε x. Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο , και επειδή g(α)=1 θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε x.

Άρα g(β)=2 (δεν γίνεται να είναι 1 γιατί η g είναι 1-1)

Και f(β)=-1 (επίσης δεν γίνεται να είναι 1 γιατί και η f είναι 1-1, και f(x)>-2 από το σύνολο αφίξεως της f)

(4Γ)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και γνησίως μονότονη.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε θα υπάρχουν α,β,γ στο Δ ώστε α<β<γ και f(α)< f(β) και f(β)>f(γ) (1)

Αφού η f είναι 1-1 θα ισχύει f(α)≠f(γ). Έστω ότι ισχύει f(α)<f(γ). Από την (1) θα ισχύει f(α)<f(γ)<f(β) οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει αριθμός $c \in (\text{~},\ )$ ώστε f(c)=f(γ) Άτοπο επειδή η f είναι 1-1.

Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς και 1-1 στο $\mathbb{R}$ άρα από την παραπάνω πρόταση είναι και γνησίως μονότονες.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Όμως $a <\ \Rightarrow f(a) > f(\ )$ άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο .

Αντίστοιχα δείχνω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέτω $h(x) = f(x) - g(x)$

Τότε θα ισχύει:

$x_1 < x_2 \overset{\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2)$ (1) και $x_1 < x_2 \overset{\nearrow}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) > -g(x_2)$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη και έχω $f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με προφανή ρίζα το α (γιατί $h(a) = f(a) - g(a) = 0$) η οποία είναι μοναδική.

(4Δ)
Η f είναι συνεχής στο [α,β] , και f(α)f(β)=-1<0.
Άρα από θεώρημα Bolzano , η εξίσωση f(x)=0 θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_1 στο (α,β).
Και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη , η ρίζα είναι μοναδική.

(4Ε)
Από το ερώτημα (4Δ) υπάρχει $x_1 \in (\sim ,\quad)$ ώστε $f(x_1)=0 \Rightarrow x_1 = f^{-1}(0)$
Δηλαδή $f^{-1}(0) \in (\sim ,\quad) \Rightarrow a < f^{-1}(0) < \quad$ (3)
Θα δείξω ότι υπάρχει $x_2 \in (\sim ,\quad)$ ώστε $g(x_2)=\frac{3}{2}$
Θέτω $T(x)=g(x)-\frac{3}{2}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο [α,β] και ισχύει Τ(α)Τ(β)<0
(Αφού $\mathrm{T}(\sim)=\mathrm{g}(\sim)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}<0$ και $\mathrm{T}(\quad)=\mathrm{g}(\quad)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}>0$)
Άρα από θ.Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\sim ,\quad)$ ώστε
$\mathrm{T}(x_2)=0 \Rightarrow g(x_2)=\frac{3}{2} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=x_2$
Δηλαδή $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \in (\sim ,\quad) \Rightarrow a < g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) < \quad$ (4)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε:

$$2a < f^{-1}(0)+g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) < 2 \quad \Rightarrow a < \frac{f^{-1}(0)+g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}{2} < \quad \Rightarrow a < \circ <$$