# ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΠΡΟΟΔΟΣ»

## ΚΥΡΙΑΚΗ 22 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2015
## ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
## «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ»
## Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της.

(2 Μονάδες)

**B.** Έστω Α ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Τι ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

(2 Μονάδες)

**C.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Α και c είναι πραγματική σταθερά, να αποδείξετε ότι $\left(cf\left(x\right)\right)'=cf'\left(x\right)$

(5 Μονάδες)

**D.** Να γίνει η αντιστοίχιση των παρακάτω ορίων της στήλης Α με την κατάλληλη τιμή της στήλης Β αιτιολογώντας την απάντηση σας.

| A. | B. |
|---|---|
| 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$ | *a.* Άλλη τιμή |
| 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ | *b.* $-\dfrac{9}{8}$ |
| 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-3x-54}{x^2-x-6}$ | c. 13 |
| 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ | *d.* $\dfrac{9}{8}$ |
| 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+x}{x}$ | *e.* 4 |
| | f. 1 |
| | g. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ |

(10 Μονάδες)

**E.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως *Σωστή* ή *Λάθος*.

i) Αν για μία συνάρτηση $f$ είναι $f\left(1\right)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=0$

ii) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}(\eta\mu x)=\eta\mu x_0$

iii) Για κάθε x>0 και ρ ρητό ισχύει $(x^\rho)'=x^{\rho-1}$

iv) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τον τύπο $\upsilon\left(t\right)=t^2$. Τότε τη στιγμή $t=2$ έχει επιτάχυνση $a\left(2\right)=4$

v) Η εφαπτόμενη ευθεία της συνάρτησης $f\left(x\right)=x+\eta\mu x$ στο σημείο $x_0=\pi$ έχει κλίση 1.

vi) Οι συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

(6 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x^3-4x^2+3x-3$ και $g(x)=\begin{cases}\frac{f\left(x\right)}{x-1}, x\neq 1\\ a+6, x=1\end{cases}, a\in\mathbb{R}$

**A.** Να βρείτε το σημείο στο οποίο η $C_f$ τέμνει τον άξονα x΄x .

**B.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο τομής της με τον άξονα x΄x .

**C.** Να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Αν $a=1$

**D.** Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g στο $x_0=1$

**E.** Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\mu^2 g'\left(-2\right)+2g'\left(\mu\right)+32>0$

(5+5+5+5+5=25 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda^2x^2+\lambda x-2,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda<0$.

**A.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f$.

**B.** Να βρεθεί η τιμή του $\lambda$, αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο με τετμημένη $x=-1$ είναι παράλληλη στον άξονα $xx'$.

**C.** Έστω $\lambda=-1$.

i) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)+4}{x^2-4}$.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x$ η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=-1$

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{A}(2, f(2))$.

(5+5+5+5+5=25 Μονάδες)

## ΘΕΜΑ 4ο

**A.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ae^x-\beta x+5,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(0,7\right)$.

i) Αν η εφαπτομένη της $C_f$ στο $\mathrm{A}\left(0,7\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=1-x$, να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Αν $\alpha = 2, \quad \beta = 1$ τότε:

ii) Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

(5+4=9 Μονάδες)

**Β.** Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε άξονα δίνεται από την συνάρτηση $x(t) = (1+t)e^{2-t} + \frac{1}{2}t^2$ όπου t ο χρόνος σε sec και x σε cm. Να βρείτε:

i) την ταχύτητα του σημείου συναρτήσει του χρόνου,
ii) την επιτάχυνση του σημείου όταν είναι ακίνητο,
iii) το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το σημείο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση,
iv) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$ με $x \in (0, +\infty)$ και ένα σημείο Μ της $C_g$ με τετμημένη την $x(t)$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ την χρονική περίοδο $t = 2$.

(4+4+4+4=16 Μονάδες)

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ**
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

**A.** Σχολ. βιβλίο σελ. 16
**B.** Σχολ. βιβλίο σελ. 9-10
**C.** Σχολ. βιβλίο σελ. 30
**D.**

1 - g 2 - e 3 - c 4 - d 5 – f

➢ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x\sqrt{x}-2\sqrt{2})(x\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{(x-2)(x\sqrt{x}-2\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x\sqrt{x}-2\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

➢ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=4$

➢ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-3x-54}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^4-2\cdot 2^2-3\cdot 2-54}{2^2-2-6}=13$

➢ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\dfrac{9}{8}$

➢ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x+1)=1$

**E.**

i) Λ
ii) Σ
iii) Λ
iv) Σ
v) Λ
vi) Λ

## ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

**A.** Για να βρούμε το σημείο που η $C_f$ τέμνει τον άξονα x'x αρκεί y=0, δηλαδή $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow$$
$$4x^2(x-1)+3(x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(4x^2+3)=0 \Rightarrow$$
$$x-1=0 \quad ή \quad 4x^2+3=0 \to αδύνατη$$
$$x=1$$

Άρα το σημείο είναι το $(x,y)=(1,0)$.

**B.** Αρχικά θα βρούμε την παράγωγο της $f$.

$$f'(x)=(4x^3-4x^2+3x-3)'=12x^2-8x+3$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την κλίση $a=f'(1)=12\cdot 1^2-8\cdot 1+3=7$.

$$b=-f'(1)\cdot 1+f(1)=-7$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,0) είναι $y=7x-7$.

**C.** Η συνάρτηση $g(x)$ γράφεται ως,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, x\neq 1\\ a+6, x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{4x^3-4x^2+3x-3}{x-1}, x\neq 1\\ a+6, x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(4x^2+3)}{x-1}, x\neq 1\\ a+6, x=1\end{cases}=\begin{cases}4x^2+3, x\neq 1\\ a+6, x=1\end{cases}$$

Για να είναι η $g$ συνεχής αρκεί $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}(4x^2+3)=7$$
$$g(1)=a+6$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1) \Leftrightarrow a+6=7 \Rightarrow a=1$, άρα

$$g(x)=\begin{cases}4x^2+3, x\neq 1\\ 7, x=1\end{cases}$$

**D.** Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

για $h\neq 0$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{4(1+h)^2+3-7}{h}=\frac{h(8+4h)}{h}=8+4h$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{x\to 1}(8+4h)=8$$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με ρυθμό μεταβολής $g'(1)=8$.

**E.** Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές $g(-2)=-16$ και $g(\mu)=8\mu$

$$\mu^2 g'(-2)+2g'(\mu)+32>0 \Leftrightarrow$$
$$\mu^2\cdot(-16)+2\cdot 8\mu+32>0 \Leftrightarrow$$
$$\mu^2-\mu-2<0$$
$$άρα \quad \mu\in(-1,2)$$

## ΘΕΜΑ 3^Ο

**A.** $D_f = \mathbb{R}$

**B.** Αρκεί $f'(-1)=0$. Αρχικά βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f$.

$f'(x)=(x^3+\lambda^2x^2+\lambda x-2)'=3x^2+2\lambda^2x+\lambda$

$f'(-1)=0 \Leftrightarrow -2\lambda^2+\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1,\dfrac{3}{2}$ όμως αφού $\lambda<0$, $\lambda=-1$.

**C.**

i) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x^2-x+1)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=-\dfrac{7}{4}$

ii) Αρκεί $f(x)>y$, άρα

$f(x)>y \Leftrightarrow x^3+x^2-x-2>-1 \Leftrightarrow x^3+x^2-x-1>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)>0$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=-1$ για $x\in(1,+\infty)$.

iii) Αρχικά θα πρέπει να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}(2,f(2))=\mathrm{A}(2,8)$. Δηλαδή την τιμή $f'(2)$.

$f'(x)=(x^3+x^2-x-2)'=3x^2-2x-1$

$f'(2)=15$

Η εφαπτόμενη θα είναι της μορφής $y=ax+b$ όπου $a=f'(2)$ και $b=-f'(2)\cdot 2+f(2)$

Άρα $y=15x-22$.

## ΘΕΜΑ 4^Ο

**A.** Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(0,7)$ θα ισχύει $f(0)=7 \Leftrightarrow a=2$, άρα $f(x)=2e^x-\beta x+5$.

i) Για να είναι η εφαπτόμενη της συνάρτησης κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=1-x$ θα πρέπει να ισχύει $f'(0)\cdot(-1)=-1 \Leftrightarrow f'(0)=1$

$f'(x)=(2e^x-\beta x+5)'=2e^x-\beta$

$f'(0)=1 \Leftrightarrow \beta=1$

ii) Για να αποδείξουμε τη σχέση $f''(x)-f'(x)=1$ θα παραγωγίσουμε την $f'(x)$

$f''(x)=(2e^x-1)'=2e^x$

$f''(x)-f'(x)=1 \Leftrightarrow$

$2e^x-(2e^x-1)=1 \Leftrightarrow$

$1=1$

**B.**

i) Η ταχύτητα ορίζεται ως η παράγωγος της μετατόπισης δηλαδή,

$$u(t)=x'(t)=((1+t)e^{2-t}+\frac{1}{2}t^2)'=((1+t)e^{2-t})'+(\frac{1}{2}t^2)'=e^{2-t}-(1+t)e^{2-t}+t$$

ii) Για να είναι ακίνητο θα πρέπει να ισχύει $u(t)=0$

$$u(t)=0 \Leftrightarrow e^{2-t}-(1+t)e^{2-t}+t=0 \Leftrightarrow t(1-e^{2-t})=0 \Rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ t=2 \end{matrix}$$

Θα βρούμε τη συνάρτηση της επιτάχυνσης παραγωγίζοντας τη συνάρτηση της ταχύτητας.

$$a(t)=u'(t)=x''(t)=(e^{2-t}-(1+t)e^{2-t}+t)'=-e^{2-t}-e^{2-t}+(1+t)e^{2-t}+1=$$

$$=-2e^{2-t}+(1+t)e^{2-t}+1$$

Άρα,

$a(0)=1-e^2$

$a(2)=0$

iii) Για να κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση αρκεί $u(t)<0$.

$$u(t)<0 \Leftrightarrow e^{2-t}-(1+t)e^{2-t}+t<0 \Leftrightarrow t(1-e^{2-t})<0 \Rightarrow t\in(0,2)$$

iv) Αναζητούμε το $g'(x(2))$, με $x(2)=5$. Το σημείο $M$ είναι το $M(5,g(5))=M\left(5,\frac{1}{5}\right)$

Για $h\neq 0$,

$$\frac{g(5+h)-g(5)}{h}=\frac{\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}}{h}=-\frac{h}{5(5+h)}$$

$$g'(5)=\lim_{x\to 5}\left(-\frac{h}{5(5+h)}\right)=-\frac{1}{25}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική περίοδο $t=2$ είναι $g'(5)=-\frac{1}{25}$.