ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ «ΠΡΟΟΔΟΣ»

ΚΥΡΙΑΚΗ 01 ΜΑΡΤΙΟΥ 2015
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ» (Γ ΛΥΚΕΙΟΥ)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

A. Να αποδιωχθεί ότι: $\left(x^2\right)' = 2x$ (5Μ)

B. i) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (2Μ)
ii) Τι ονομάζεται διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά; (3Μ)

C. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω πρωτάσεις ως σωστές ή λάθος. (10Μ)

i) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ii) Δυο δείγματα ίσου μεγέθους, από τον ίδιο πληθυσμό και με την ίδια τυπική απόκλιση, έχουν ίδιο βαθμό ομοιογένειας.

iii) Το εύρος είναι μέτρο θέσης

iv) Αν μια μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+2s)$ περιέχεται το 47,5% των παρατηρήσεων.

v) Ισχύει ότι: $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$

D. Να γίνει αντιστοίχιση της στήλης Α(Δείγμα) με τη στήλη Β(μέση τιμή) (5Μ)

Στήλη Α(Δείγμα)	Στήλη Β(μέση τιμή)
1. 2, -3, 1, 0, -1, 3	Α. -1/3
2. -5, -3, 1, 1, 2, 3	Β. 7
3. 6, 8, 7	Γ. 4
4. 3, 2, 5, 6	Δ. 1/3
5. 11, 4, 9, 8	Ε. 8
	Ζ. άλλο

ΘΕΜΑ 2ο

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

[...-...)	x_i	vi	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[...-...)				10			
[...- 8)					24		
[...-...)							
[...-...)	14						85
[...-...)					80		
Σύνολο							

Αν γνωρίζουμε ότι $\bar{x} = 11$

A. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης ισούται με 4. (4M)

B. Να συμπληρωθεί ο πίνακας. (9M)

C. Να βρεθεί το πλήθος των παρατηρήσεων που ξεπερνούν το 12. (3M)

D. Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από 11 και μικρότερες του 16. (4M)

E. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων. (5M)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 10 \cdot s \cdot x^2 + \bar{x} \cdot x + 11,\ \ x \in \Re$ όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος μεγέθους ν (με $\bar{x} \neq 0$ και s>0). Επίσης η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $B(-1, f(-1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία y=2015.

A. Να βρείτε την $f\,'$ (3M)

B. Να αποδείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές (5M)

C. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (7M)

D. Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1, τότε:
   i) να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, (6M)
   ii) να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο B. (4M)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται δείγμα 2000 παρατηρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ που ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.
Γνωρίζουμε ότι:
3 παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 25
50 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 50

A. Να βρεθούν : η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση, η διάμεσος, το εύρος , ο συντελεστής μεταβολής των παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. (10Μ)

B. Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου α που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση του δείγματος για να γίνει ομοιογενές, (5Μ)

C. Θεωρούμε δυο καινούργια δείγματα Α και Β. Το δείγμα Α αποτελείται από τις παρατηρήσεις $y_i = -2x_i + 10$ και το δείγμα Β από μείωση 20% των τιμών των παρατηρήσεων του αρχικού δείγματος.

i) Να συγκριθούν τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια (5Μ)

ii) Να βρεθεί η μέση τιμή του δείγματος που προκύπτει από τη διαφορά των παρατηρήσεων των δειγμάτων Α, Β $(k_i = y_i - t_i,\ i = 1, \ldots, 2000)$ (5Μ)

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

A. Σελίδα 28 σχολικού

B. i) Σελίδα 13 σχολικού ii) Σελίδα 87 σχολικού

C. i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Λ

D. 1. Δ 2. Ζ 3. Β 4. Γ 5. Ε

Θέμα 2ο

A. Έχουμε κλάσεις ίσου πλάτους άρα $\frac{(8+c)+(8+2c)}{2}=14 \Leftrightarrow c=4$

B.

[-)	x_i	vi	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[0 - 4)	2	8	0,10	10	8	0,10	10
[4 - 8)	6	16	0,20	20	24	0,30	30
[8 - 12)	10	16	0,20	20	40	0,50	50
[12 - 16)	14	28	0,35	35	68	0,85	85
[16 - 20)	18	12	0,15	15	80	1	100
Σύνολο		80	1	100			

C. Το πλήθος των παρατηρήσεων που ξεπερνούν το 12 είναι $\nu_4+\nu_5=28+12=40$

D. Το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο $[11,12)$ είναι 4 και το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο $[12,16)$ είναι 28. Άρα στο $[11,16)$ έχουμε 32 παρατηρήσεις που είναι το $\frac{100\cdot 32}{80}=40\%$

E. Παρατηρώ ότι $F_3\%=50\%$. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων η τετμημένη του σημείου που αντιστοιχεί στο 50% είναι 12, άρα $\delta=12$.

Θέμα 3^{o}

A. $f'(x) = \left(10 \cdot s \cdot x^2 + \bar{x} \cdot x + 11\right)' = 20 \cdot s \cdot x + \bar{x}$

B. Αφού η εφαπτομένη της f στο $B\left(-1, f(-1)\right)$ είναι παράλληλη στην θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot s \cdot (-1) + \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 20 \cdot s$

Τότε $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\cancel{s}}{20 \cdot \cancel{s}} = \dfrac{5}{100} < \dfrac{10}{100}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

C. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 \cdot s \cdot x + \bar{x} = 0 \overset{\bar{x}=20\cdot s}{\Leftrightarrow} 20 \cdot s(x+1) = 0 \overset{s>0}{\Leftrightarrow} x = -1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 20 \cdot s \cdot x + \bar{x} > 0 \overset{\bar{x}=20\cdot s}{\Leftrightarrow} 20 \cdot s(x+1) > 0 \overset{s>0}{\Leftrightarrow} x > -1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f ΄	-		+
f	↘	1 τ.ε.	↗

Η f ↘ στο $(-\infty, -1]$ και f ↗ στο $[-1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -1$ το $f(-1) = 10 \cdot s - \bar{x} + 11 = -10s + 11$

D. i. Αφού το ελάχιστο είναι 1 έχουμε $f(-1) = 1 \Leftrightarrow -10s + 11 = 1 \Leftrightarrow s = 1$ και $\bar{x} = 20 \cdot 1 = 20$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο B είναι $y = f'(-1)x + \beta \overset{f'(-1)=0}{\Leftrightarrow} y = \beta$. Το B ανήκει στην εφαπτομένη άρα $f(-1) = \beta \Leftrightarrow \beta = -10 \cdot s + 11 \Leftrightarrow \beta = 1$. Άρα $y = 1$

Θέμα 4^{o}

A. Στο $(50, +\infty)$ βρίσκεται το $\dfrac{50}{2000} \cdot 100 = 2{,}5\%$ των παρατηρήσεων. Στο $(\bar{x} + 2s, +\infty)$ βρίσκεται το $\dfrac{99{,}7\% - 95\%}{2} + \dfrac{100\% - 99{,}7\%}{2} = 2{,}35\% + 0{,}15\% = 2{,}5\%$ των παρατηρήσεων άρα $\bar{x} + 2s = 50$ (1).

Στο $(-\infty, 25)$ βρίσκεται το $\dfrac{3}{2000} \cdot 100 = 0{,}15\%$ των παρατηρήσεων. Στο $(-\infty, \bar{x} - 3s)$ βρίσκεται το $\dfrac{100\% - 99{,}7\%}{2} = 0{,}15\%$ των παρατηρήσεων άρα $\bar{x} - 3s = 25$ (2).

Από (1), (2) $\overline{x} = 40 = \delta$ και $s = 5$ οπότε $R = 30$ και $CV = \dfrac{5}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\% > 10\%$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

B. Από γνωστή εφαρμογή έχουμε ότι $\overline{a} = \overline{x} + c = 40 + c$ και $s_a = s_x = 5$ οπότε

$CV_a = \dfrac{5}{40+c} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 50 \le 40 + c \Leftrightarrow 10 \le c$. Άρα η ελάχιστη τιμή είναι 10.

C. Θα χρειαστεί να αποδείξουμε ότι αν $y_i = ax_i + b$ τότε $\overline{y} = a\overline{x} + b$ και $s_y = |a| s_x$

$$\overline{y} = \frac{y_1 + \ldots + y_\nu}{\nu} = \frac{ax_1 + b + \ldots + ax_\nu + b}{\nu} = \frac{a(x_1 + \ldots + x_\nu)}{\nu} + \frac{\cancel{\nu} b}{\cancel{\nu}} = a\overline{x} + b$$

$$s_y^2 = \frac{(y_1 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_\nu - \overline{y})^2}{\nu} = \frac{(ax_1 + \cancel{b} - a\overline{x} - \cancel{b})^2 + \ldots + (ax_\nu + \cancel{b} - a\overline{x} - \cancel{b})^2}{\nu} =$$

$$= \frac{a^2(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + a^2(x_\nu - \overline{x})^2}{\nu} = a^2 s_x^2. \text{ Άρα } s_y = |a| s_x$$

i. Λόγω της προηγούμενης απόδειξης έχουμε ότι $\overline{x}_A = -2\overline{x} + 10 = -70$, $s_A = |0{,}8| \cdot s = 10$

άρα $CV_A = \dfrac{10}{70} = \dfrac{1}{7}$.

Το δείγμα B προκύπτει από το αρχικό πολλαπλασιάζοντας με 0,8 άρα από γνωστή εφαρμογή έχουμε ότι $\overline{x}_B = 0{,}8\overline{x} = 32$, $s_B = |0{,}8| \cdot s = 4$ άρα $CV_B = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{7} = CV_A$

δηλαδή το δείγμα B έχει περισσότερη ομοιογένεια.

ii. Οι τιμές που παίρνει το καινούργιο δείγμα είναι της μορφής

$k_i = y_i - t_i \Leftrightarrow k_i = -2x_i + 10 - 0{,}8x_i \Leftrightarrow k_i = -2{,}8x_i + 10$ και λόγω της προηγούμενης απόδειξης έχουμε ότι $\overline{k} = -2{,}8\overline{x} + 10 = -102$.