ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ Μ.Ε. ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 1 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

Θέμα 1^{ο}

Α) Να διατυπώσετε τα κριτήρια για να είναι δύο τρίγωνα όμοια.

(Μονάδες 5)

Β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το 2^{ο} θεώρημα διαμέσων.

(Μονάδες 5)

Γ) Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:
«Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β, τότε ισχύει ότι:
$PE^2 = PA \cdot PB$.

(Μονάδες 5)

Δ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ αν $\hat{A} > 90°$, τότε: $\beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2$.
2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση, είναι όμοια.
3. Για τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ, ισχύει: $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.
4. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,R) , αν και μόνο αν:$\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$.
5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 2^{ο}

Α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}$.

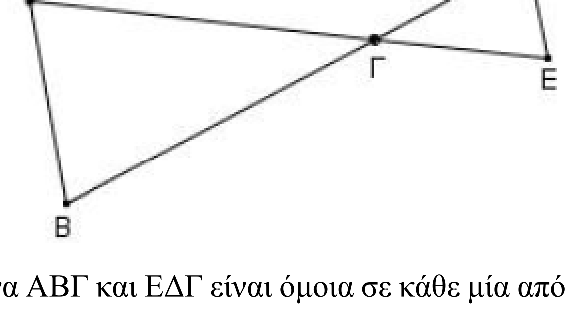
Α) Να αποδείξετε ότι: $AB = \frac{3}{4}A\Gamma$.

(Μονάδες 6)

Β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $B\Gamma = \frac{5}{4}A\Gamma$, να εξετάσετε εάν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Β. Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΕ.

(Μονάδες 6)

β) ΒΓ=2ΔΓ και $ΕΓ = \frac{1}{2} ΑΓ$.

(Μονάδες 6)

<u>Θέμα 3ο</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γ = 6 , α = 9 και $\hat{B} = 60°$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R).

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 3\sqrt{7}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της γ πάνω στην α.

(Μονάδες 7)

δ) Εάν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Ε, να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΕΓ.

(Μονάδες 8)

<u>Θέμα 4ο</u>

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη και Ζ το μέσο της διαμέσου ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma} \; και \; AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) $EZ = \frac{\alpha\beta}{4\gamma}$.

(Μονάδες 5)

γ) $E\Delta = \frac{\alpha^3}{2\beta\gamma}$.

(Μονάδες 7)

δ) Τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

<u>ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>
<u>ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 ΩΡΕΣ</u>
<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!</u>

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^{ο}

Α) Σχολικό βιβλίο, σελ.173-174
Β) Σχολικό βιβλίο, σελ. 197
Γ) Σχολικό βιβλίο, σελ. 201
Δ) 1.→Λ
2.→Λ
3.→Λ
4.→Λ
5.→Λ

Θέμα 2^{ο}

Α) α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι εσωτερική διχοτόμος.

Άρα ισχύει η αναλογία $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

Επομένως, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow ΑΒ=\frac{3}{4}ΑΓ$.

β) Από τη σχέση $ΑΒ=\frac{3}{4}ΑΓ$ προκύπτει ότι ΑΒ<ΑΓ.

Από τη σχέση $ΒΓ=\frac{5}{4}ΑΓ$ προκύπτει ότι ΒΓ>ΑΓ.

Άρα ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ, δηλ. η ΒΓ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Υπολογίζουμε λοιπόν

- $ΒΓ^2=\left(\frac{5}{4}ΑΓ\right)^2=\frac{25}{16}ΑΓ^2$ και
- $ΑΒ^2+ΑΓ^2=\left(\frac{3}{4}ΑΓ\right)^2+ΑΓ^2=\frac{9}{16}ΑΓ^2+ΑΓ^2=\frac{25}{16}ΑΓ^2$.

Άρα $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{Α}=90°$.

Β) α) Αφού ΑΒ//ΔΕ τότε οι γωνίες $Α\hat{Β}Γ$ και $Γ\hat{Δ}Ε$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ καθώς και οι γωνίες $Β\hat{Α}Γ$ και $Γ\hat{Ε}Δ$ είναι ίσες και αυτές ως εντός εναλλάξ. Επίσης οι γωνίες $Α\hat{Γ}Β$ και $Δ\hat{Γ}Ε$ είναι ίσες ως κατακορυφήν, και αφού τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις γωνίες ίσες, θα είναι όμοια.

β) Έχουμε ότι $ΒΓ=2\cdot ΔΓ$ δηλαδή $\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{1}{2}$ και αφού $\frac{ΕΓ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}$, προκύπτει ότι $\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$. Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία ίση, αφού οι γωνίες $Α\hat{Γ}Β$ και $Δ\hat{Γ}Ε$ είναι ίσες ως κατακορυφήν, άρα είναι όμοια.

Θέμα 3^{ο}

α) Ν.Συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ για την πλευρά β:

$$β^2=α^2+γ^2-2αγσυνΒ \Rightarrow β^2=81+36-2\cdot 9\cdot 6\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow β^2=63 \Rightarrow$$

$\boxed{β=3\sqrt{7}}$.

β) α η μεγαλύτερη πλευρά και ισχύει: $α^2<β^2+γ^2$, αφού $α^2=81$, $β^2+γ^2=99$.

Άρα $\hat{Α}<90°$ και αφού γνωρίζουμε πως σε ένα τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

γ) Φέρνω ύψος ΑΔ.

Εφαρμόζω Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος για την πλευρά β $\left(\hat{Β}<90°\right)$:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta \Rightarrow B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \Rightarrow B\Delta = \frac{81 + 36 - 63}{2 \cdot 9} \Rightarrow B\Delta = \frac{54}{18} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{B\Delta = 3}$.

δ) Από 1ο Θ.Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει:

$AM^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} \Rightarrow AM^2 = \frac{117}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{117}}{2} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

ΑΕ , ΒΓ χορδές και τέμνονται στο Μ. Άρα :

$$AM \cdot ME = BM \cdot M\Gamma \xRightarrow{BM=M\Gamma=\frac{\alpha}{2}} ME = \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}}{AM} \Rightarrow ME = \frac{81}{4\cdot\frac{\sqrt{117}}{2}} \Rightarrow ME = \frac{9\sqrt{117}}{26} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{ME = \frac{27\sqrt{13}}{26}}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΕΓ είναι όμοια, αφού $A\widehat{M}B = E\widehat{M}\Gamma$ (ως κατακορυφήν) και $A\widehat{B}M = M\widehat{E}\Gamma$ (ως εγγεραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα: $\frac{E\Gamma}{AB} = \frac{M\Gamma}{AM} \Rightarrow \frac{E\Gamma}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{AM} \Rightarrow E\Gamma = \frac{\alpha\cdot\gamma}{2AM} \Rightarrow E\Gamma = \frac{9\cdot 6}{2\cdot\frac{\sqrt{117}}{2}} \Rightarrow E\Gamma = \frac{54\sqrt{117}}{117} \Rightarrow$

$\Rightarrow E\Gamma = \frac{6\sqrt{117}}{13} \Rightarrow \boxed{E\Gamma = \frac{18\sqrt{13}}{13}}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\beta^2+\gamma^2}{2}$. Άρα $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90°$.

α) ΑΕ: η προβολή της β πάνω στην γ. Άρα εφαρμόζω Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος για την πλευρά α $\left(\hat{A} < 90°\right)$:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AE \xRightarrow{\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2} \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\gamma \cdot AE \Rightarrow 2\gamma \cdot AE = \alpha^2 \Rightarrow \boxed{AE = \frac{\alpha^2}{2\gamma}}.$$

Για την ΑΜ εφαρμόζω 1ο Θ.Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$AM^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{4} \xRightarrow{\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2} AM^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \boxed{AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}.$$

β) Στο τρίγωνο ΑΕΜ, ΕΖ διάμεσος, 1ο Θ.Διαμέσων:

$$EZ^2 = \frac{2AE^2 + 2EM^2 - AM^2}{4} \xRightarrow[\text{ΕΒΓ,άρα } EM=\frac{\alpha}{2}]{\text{ΕΜ διάμεσος στο ορθ.τρίγωνο}} EZ^2 = \frac{2\frac{\alpha^4}{4\gamma^2} + 2\frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{4}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EZ^2 = \frac{2\alpha^4 - \alpha^2\gamma^2}{16\gamma^2} \Rightarrow EZ^2 = \frac{\alpha^2 \cdot (2\alpha^2 - \gamma^2)}{16\gamma^2} \xRightarrow{2\alpha^2-\gamma^2=\beta^2} EZ^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{16\gamma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{EZ = \frac{\alpha\beta}{4\gamma}}.$$

γ) Το ΕΔΓΒ είναι εγγράψιμο, αφού η ΒΓ «φαίνεται» από τις απέναντι κορυφές Ε και Δ υπό ίσες γωνίες. Συνεπώς: $A\hat{B}\Gamma + E\hat{\Delta}M = 180°$. Όμως $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}M = 180°$.

Άρα: $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Gamma$.

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, αφού: $\hat{A}$ κοινή και $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Gamma$.

Άρα: $\frac{AE}{\beta} = \frac{E\Delta}{\alpha} \Rightarrow E\Delta = \frac{\alpha\cdot AE}{\beta} \Rightarrow \boxed{E\Delta = \frac{\alpha^3}{2\beta\gamma}}$.

δ) Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, θα ισχύει: $\frac{A\Delta}{\gamma} = \frac{E\Delta}{\alpha} \Rightarrow A\Delta = \frac{\alpha^2}{2\beta}$.

Στο τρίγωνο ΑΔΜ, ΔΖ διάμεσος, 1ο Θ.Διαμέσων:

$$\Delta Z^2 = \frac{2A\Delta^2 + 2\Delta M^2 - AM^2}{4} \xRightarrow[\text{ΔΒΓ,άρα } \Delta M=\frac{\alpha}{2}]{\text{ΔΜ διάμεσος στο ορθ.τρίγωνο}} \Delta Z^2 = \frac{2\frac{\alpha^4}{4\beta^2} + 2\frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{4}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta Z^2 = \frac{2\alpha^4 - \alpha^2\beta^2}{16\beta^2} \Rightarrow \Delta Z^2 = \frac{\alpha^2(2\alpha^2 - \beta^2)}{16\beta^2} \xRightarrow{2\alpha^2-\beta^2=\gamma^2} \Delta Z^2 = \frac{\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} \Rightarrow$$

$\Delta Z = \frac{\alpha\gamma}{4\beta}$.

- $\Delta Z + EZ = \frac{\alpha\gamma}{4\beta} + \frac{\alpha\beta}{4\gamma} = \frac{\alpha\gamma^2+\alpha\beta^2}{4\beta\gamma} = \frac{\alpha(\gamma^2+\beta^2)}{4\beta\gamma} \xRightarrow{\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2} \Delta Z + EZ = \frac{\alpha^3}{2\beta\gamma} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \Delta Z + EZ = E\Delta$. Άρα τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.