

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή 23/10/2016

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- i. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$
- ii. Ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- iii. Ισχύει ότι $0 < x < 1 \Rightarrow x < x^2$
- iv. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$
- v. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι τότε, $\alpha^7 \beta^7 = 1$
- vi. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε, $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

(2+2+2+2+2+2=12 Μονάδες)

B. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

- i. $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$
- ii. Αν $\alpha + \beta > 0$, τότε ισχύει $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$
- iii. Αν ισχύει $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ να δείξετε ότι $\beta - \gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$
- iv. Αν οι αριθμοί $\kappa = \alpha - \frac{1}{2}$ και $\lambda = \beta - 2$ είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι: $4\alpha + \beta = 2\alpha\beta$
- v. Αν $\alpha - \beta = 5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha(\alpha + 2) + \beta(\beta - 2) - 2\alpha\beta$

(2+2+2+2+3=11 Μονάδες)

C. Τι ονομάζουμε σύνολο και πότε δύο σύνολα είναι ίσα;

(2 Μονάδες)

Θέμα 2^ο

A. Έστω βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ και τα υπόλοιπα υποσύνολα του Ω , $A = \{1, 5, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$.

- i. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα παραπάνω σύνολα.
- ii. Να περιγράψετε με αναγραφή τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cap B$, $B - A$.
- iii. Να γράψετε όλα τα δυνατά υποσύνολα του A.

(2+2+2=6 Μονάδες)

B.

- i. Αν ισχύει $\frac{5x+18}{7y+12} = \frac{3}{2}, \beta \neq 0$, τότε να βρείτε τον λόγο $\frac{x}{y}$.
- ii. Να δείξετε ότι $(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4$
- iii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (\frac{2016}{2017} + \frac{2017}{2016})^2 - (\frac{2016}{2017} - \frac{2017}{2016})^2$

(2+2+3=7 Μονάδες)

C. Αν ισχύει $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$, με $x \neq 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

- i. $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$
- ii. $B = x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3+3=6 Μονάδες)

D. Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y , έχει περίμετρο 20m.

- i. Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x
- ii. Να εκφραστεί το εμβαδόν E του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (i)
- iii. Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν E είναι μικρότερο ή ίσο των 25 m^2 .

(2+2+2=6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα. (8 Μονάδες)
- B. Να διατυπώσετε τα ανακεφαλαιωτικά κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. (4 Μονάδες)
- C. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
1. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες είναι ίσα.
 2. Η μεσοκάθετη μιας χορδής κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
 3. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν δύο πλευρές και μία γωνία του ενός είναι ίσες με δύο πλευρές και μία γωνία του άλλου.
 4. Ύψος σε ένα τρίγωνο είναι η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά.
 5. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε διχοτόμος του είναι και διάμεσος του.

(5 Μονάδες)

D. Να συμπληρώσετε με λέξεις ή προτάσεις τα παρακάτω κενά:

1.τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
2.λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές ίσες.
3. Ένα σημείο M βρίσκεται στη διχοτόμο μίας γωνίας xOy, όταν
4. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσες μία προς μια και τις σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

Να αποδείξετε ότι:

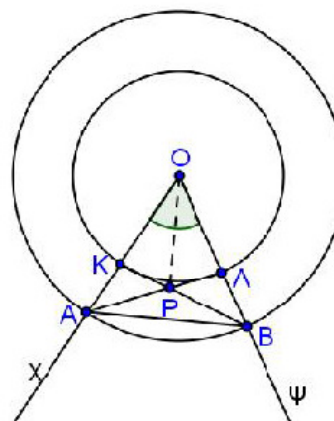
1. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (3 Μονάδες)
2. AΔ = AΕ (3 Μονάδες)

B. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και η διχοτόμος του ΒΚ. Φέρνουμε την ΚΛ⊥ΒΓ.

1. Να αποδείξετε ότι ΒΑ=ΒΛ (3 Μονάδες)
2. Αν οι ευθείες ΛΚ και ΒΑ τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι
 - (i) ΛΓ=AΘ (3 Μονάδες)
 - (ii) η ευθεία ΒΚ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΘ. (4 Μονάδες)

C. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ₁) και (O, ρ₂) με ρ₁ < ρ₂, που τέμνουν την Oχ στα σημεία Κ,Α και την Oψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

1. AΛ = ΒΚ (4 Μονάδες)
2. Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AΛ, ΒΚ. (4 Μονάδες)
3. Η OP διχοτομεί τη γωνία xOy. (4 Μονάδες)



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!