ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

A. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A')=1-P(A)$.

(7 Μονάδες)

B. Να ελέγξετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i) Αν ένα ενδεχόμενο A δειγματικού χώρου Ω είναι αδύνατο, τότε $P(A)=1$.

ii) Τα ενδεχόμενα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{4,5,6\}$ του δειγματικού χώρου $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ είναι συμπληρωματικά.

iii) Αν $A\subseteq B$ τότε $P(A\cup B)=P(B)$.

iv) Ισχύει ότι $P(B-A)+P(A\cap B)=P(B)$.

v) Το ενδεχόμενο: «Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A και B» συμβολίζεται με $(A-B)\cup(B-A)$.

vi) $(-\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2$

vii) $(-\alpha-\beta)^3=-(\alpha+\beta)^3$

(7 Μονάδες)

C. Αν $\alpha,\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}=\alpha-\beta$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\dfrac{99^3-19^3}{118^2-99\cdot 19}$.

(3+3=6 Μονάδες)

D. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(2\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2-3\beta^2$.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

A. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha=(-1)^{50}\cdot(-3)^2-(-2)^3-(-3)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ και $\beta=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3^{-1}\right]^{-1}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\left[\dfrac{\beta:\alpha^{-4}}{(\beta^{-1}\alpha^{3})^{3}}\right]:\left[\dfrac{\alpha^{7}:\alpha^{2}}{(\beta^{5})^{2}\beta^{-7}}\right]^{-1}$ όπου α,β οι αριθμοί του ερωτήματος **Α** i).

(3+4=7 Μονάδες)

Β. Στην Α' τάξη του ΓΕΛ Σουνίου φοιτούν 100 μαθητές. Από αυτούς σε 50 αρέσει το μάθημα της Άλγεβρας, σε 30 αρέσει το μάθημα της Γεωμετρίας και σε 20 αρέσουν και τα δύο μαθήματα. Αν **Α** το ενδεχόμενο σε έναν μαθητή να αρέσει η άλγεβρα και **Γ** το ενδεχόμενο σε έναν μαθητή να αρέσει η γεωμετρία.

i) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα σε ένα μαθητή να αρέσει η άλγεβρα είναι $P(A)=0.5$ και η πιθανότητα να του αρέσει η γεωμετρία είναι $P(\Gamma)=0.3$.

ii) Να βρείτε την πιθανότητα σε ένα μαθητή να αρέσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα.

iii) Να βρείτε την πιθανότητα σε ένα μαθητή να μην του αρέσει η Γεωμετρία.

iv) Να βρείτε την πιθανότητα σε ένα μαθητή να μην του αρέσει κάποιο από τα δύο μαθήματα.

v) Να βρείτε την πιθανότητα σε ένα μαθητή να του αρέσει ή μόνο η άλγεβρα ή μόνο η γεωμετρία.

vi) Να βρείτε την πιθανότητα σε ένα μαθητή να του αρέσει η άλγεβρα και να μην του αρέσει η γεωμετρία.

(2+2+2+2+2+2=12 Μονάδες)

C. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες.

i) Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A)=\dfrac{2}{5}$ και $P(B)=\dfrac{5}{8}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{40}\le P(A\cap B)\le\dfrac{2}{5}$.

ii) Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A)=\dfrac{1}{3}$ και $P(B)=\dfrac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{3}{8}\le P(A\cup B)\le\dfrac{17}{24}$.

(3+3=6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

i) οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες,

ii) η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

(4+4=8 Μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε *Σωστή* (Σ) ή *Λάθος* (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση μία προς μία και δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του άλλου, είναι ίσα μεταξύ τους.

ii) Διάμεσος σε ένα τρίγωνο είναι η απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά.
iii) Αν ένα τρίγωνο έχει μία οξεία γωνία, τότε είναι οξυγώνιο.
iv) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα..
v) Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας, ισαπέχουν από τις πλευρές της.

(5 Μονάδες)

C. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

(3 Μονάδες)

<u>ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$</u>

A. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Κ. Από το Κ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΚΛ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:

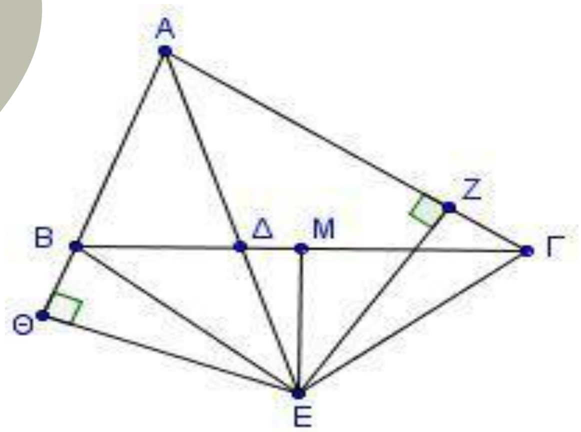
i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Gamma K}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{K\Gamma\Lambda}}$ είναι ίσα.
ii) Η ευθεία ΓΚ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΛ.

(3+4=7 Μονάδες)

B. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{EB\Gamma}}$ είναι ισοσκελές
ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{\Theta BE}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{Z\Gamma E}}$ είναι ίσα
iii) $\mathrm{A\hat{\Gamma}E} + \mathrm{A\hat{B}E} = 180^\circ$

(5+5+5=15 Μονάδες)



C. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ\right)$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα $\mathrm{AE} = \mathrm{AB}$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΒ, προς το Β, παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $\mathrm{AZ} = \mathrm{A\Gamma}$.
i) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{EZ}$.
ii) Αν η προέκταση της ΓΒ τέμνει τη ΕΖ στο Η, να αποδείξετε ότι η ΗΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E\hat{H}\Gamma}$.

(5+7=12 Μονάδες)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελ. 33

B. i) -> Λάθος

ii) -> Σωστό

iii) -> Σωστό

iv) -> Σωστό

v) -> Σωστό

vi) -> Λάθος

vii) -> Σωστό

C. $\frac{\sim^3 - \ ^3}{(\sim + \ )^2 - \sim} = \frac{(\sim - \ )(\sim^2 + \ ^2 + \sim \ )}{\sim^2 + \ ^2 + 2\sim \ - \sim} = \frac{(\sim - \ )(\sim^2 + \ ^2 + \sim \ )}{\sim^2 + \ ^2 + \sim} = \sim -$

Άρα $\Pi = \frac{99^3 - 19^3}{118^2 - 99 \cdot 19} = 99 - 19 = 80$

D.

$(2\sim - \ ) \cdot (2\sim + \ ) - (\sim + \ )^2 - (\sim - \ )^2 = 4\sim^2 - \ ^2 - \sim^2 - \ ^2 - 2\sim \ - \sim^2 + 2\sim \ - \ ^2 = 2\sim^2 - 3 \ ^2$

ΘΕΜΑ 2ο

A.

i) $a = (-1)^{50} \cdot (-3)^2 - (-2)^3 - (-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 1 \cdot 9 + 8 - 9 - 2 = 6$

$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3^{-1}\right]^{-1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{12}\right)^{-1} = -12$

ii) $\Pi = \left[\frac{\ :\sim^{-4}}{(\ ^{-1}\sim^3)^3}\right] : \left[\frac{\sim^7 : \sim^2}{(\ ^5)^2 \cdot \ ^{-7}}\right]^{-1} = \left[\frac{\ }{\sim^{-4} \ ^{-3}\sim^9}\right] : \left[\frac{\sim^5}{\ ^{2\cdot 5-7}}\right]^{-1} = \left[\frac{\ ^4}{\sim^5}\right] : \left[\frac{\sim^5}{\ ^3}\right]^{-1} =$

$= \left[\frac{\ ^4}{\sim^5}\right] : \left[\frac{\ ^3}{\sim^5}\right] = \frac{\ ^4}{\sim^5} \cdot \frac{\sim^5}{\ ^3} = \ \overset{i)}{=} -12$

B. $N(\Omega)=100,\ N(A)=50,\ N(\Gamma)=30,\ N(A\cap\Gamma)=20$

i) $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{50}{100}=0,5,\ P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{30}{100}=0,3$

ii) $P(A\cup\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=0,5+0,3-0,2=0,6$

iii) $P(\Gamma')=1-P(\Gamma)=1-0,3=0,7$

iv) $P((A\cup\Gamma)')=1-P(A\cup\Gamma)=1-0,6=0,4$

v) $P((A-\Gamma)\cup(\Gamma-A))=P(A-\Gamma)+P(\Gamma-A)=P(A)-P(A\cap\Gamma)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=$
$=0,5-0,2+0,3-0,2=0,4$

Αφού $(A-\Gamma)\cap(\Gamma-A)=\varnothing$

vi) $P(A\cap\Gamma')=P(A-\Gamma')=P(A)-P(A\cap\Gamma)=0,5-0,2=0,3$

C.

i) $A\cap B\subseteq A$ τότε $P(A\cap B)\le P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)\le\dfrac{2}{5}$

$$P(A\cap B)\ge\frac{1}{40}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge\frac{1}{40}\Leftrightarrow\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-P(A\cup B)\ge\frac{1}{40}\Leftrightarrow P(A\cup B)\le 1$$

που ισχύει .

ii) $B\subseteq A\cup B$ τότε $P(B)\le P(A\cup B)\Leftrightarrow P(A\cup B)\ge\dfrac{3}{8}$

$$P(A\cup B)\le\frac{17}{24}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le\frac{17}{24}\Leftrightarrow\frac{1}{3}+\frac{3}{8}-P(A\cap B)\le\frac{17}{24}\Leftrightarrow P(A\cap B)\ge 0$$

που ισχύει .

ΘΕΜΑ 3ο

A. i) Σχολικό βιβλίο σελ. 41

ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 41

B. i) -> Λάθος

ii) -> Λάθος

iii) -> Λάθος

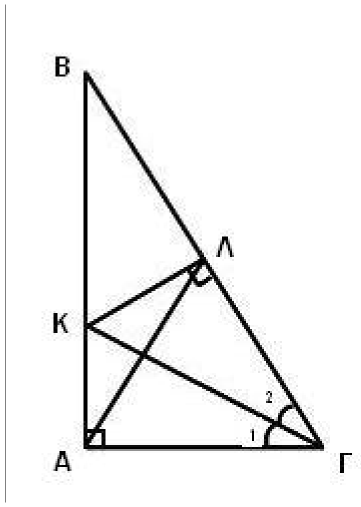
iv) -> Λάθος

v) -> Σωστό

C. Σχολικό βιβλίο σελ. 41, 44

ΘΕΜΑ 4ο

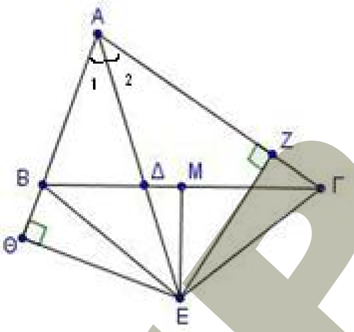
Α.



i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}, \overset{\Delta}{\mathrm{K\Gamma\Lambda}}$ τα οποία έχουν α) ΑΚ=ΚΛ(αφού Κ σημείο της διχ ΚΓ) και β) $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}} = \overset{\Delta}{\mathrm{K\Gamma\Lambda}}$

ii) Από το i) έχουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}} = \overset{\Delta}{\mathrm{K\Gamma\Lambda}}$ άρα και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma\Lambda}$ επομένως το Γ ισαπέχει από τα άκρα του ΑΛ. ΚΛ=ΚΑ αφού Κ σημείο της διχοτόμου ΚΓ δηλαδή το Κ ισαπέχει από τα άκρα του ΑΛ. Επομένως το ΚΛ μεσοκάθετος του ΑΛ.

Β. Μ μέσο του ΒΓ άρα ΒΜ=ΜΓ και ΑΔ διχοτόμος άρα $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$



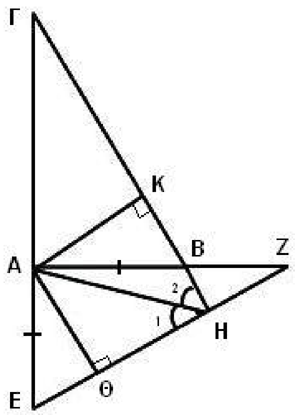
i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{BME}}, \overset{\Delta}{\mathrm{ME\Gamma}}$ τα οποία έχουν α) ΜΕ κοινή πλευρά

και β) ΒΜ=ΜΓ. Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{BME}} = \overset{\Delta}{\mathrm{ME\Gamma}}$ άρα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους δηλ ΒΕ=ΕΓ επομένως το $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma E}}$ είναι ισοσκελές.

ii) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{\Theta BE}}, \overset{\Delta}{\mathrm{E\Gamma Z}}$ τα οποία έχουν α) ΘΕ=ΕΖ (αφού Ε σημείο της διχ ΑΔ) και β) $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2$. Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{\Theta BE}} = \overset{\Delta}{\mathrm{E\Gamma Z}}$.

iii) Οι γωνίες $A\hat{B}E, E\hat{B}\Theta$ είναι παραπληρωματικές δηλαδή $A\hat{B}E + E\hat{B}\Theta = 180^\circ$, όμως από το ii) έχουμε ότι $\overset{\Delta}{\Theta BE} = \overset{\Delta}{E\Gamma Z}$ άρα και $\Theta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ επομένως $A\hat{B}E + A\hat{\Gamma}E = 180^\circ$

C.



i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}, \overset{\Delta}{AZE}$ τα οποία έχουν α) ΑΓ=ΑΖ (από υποθ.) και

β) ΑΒ=ΕΑ (από υποθ.). Άρα $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{AZE}$ επομένως και $B\Gamma = EZ$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι το Α ισαπέχει από τις πλευρές ΗΚ και ΗΕ. Αν $AK \perp \Gamma H$ και $A\Theta \perp EH$, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABK} = \overset{\Delta}{AE\Theta}$ είναι ίσα αφού α) $AE = AB$ και β) $A\hat{E}\Theta = A\hat{B}K$ (αφού $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{AZE}$ από το i))