ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑΤΑ

<u>ΘΕΜΑ 1Ο</u>

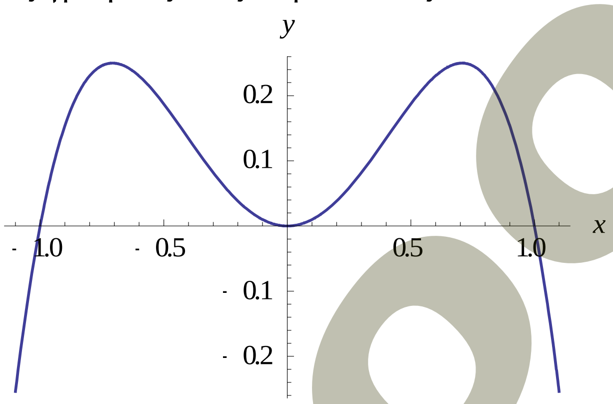
A. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται άρτια και πότε περιττή;

(3+3=6 Μονάδες)

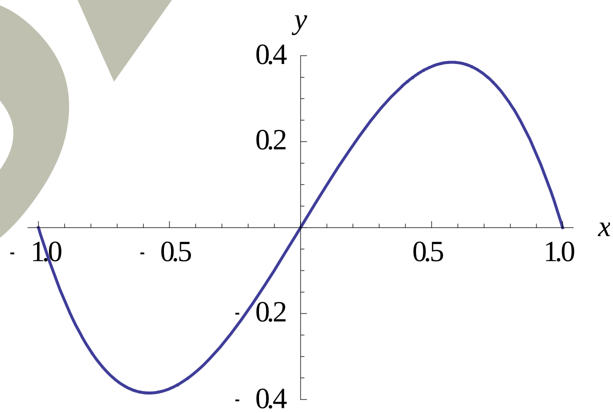
B. Πότε μία συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο;

(5 Μονάδες)

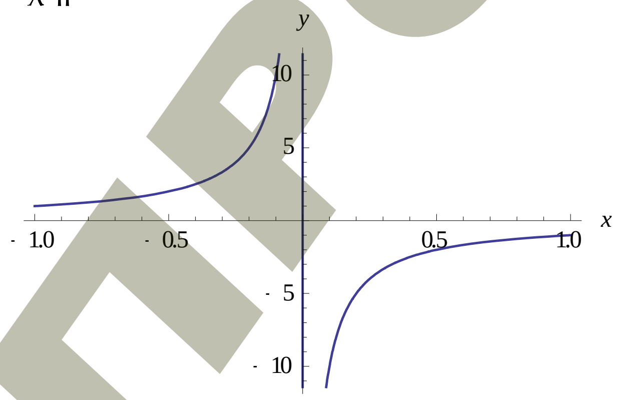
C. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω συναρτήσεις ως *άρτια, περιττή* ή *τίποτα* σύμφωνα με τις γραφικές τους παραστάσεις.



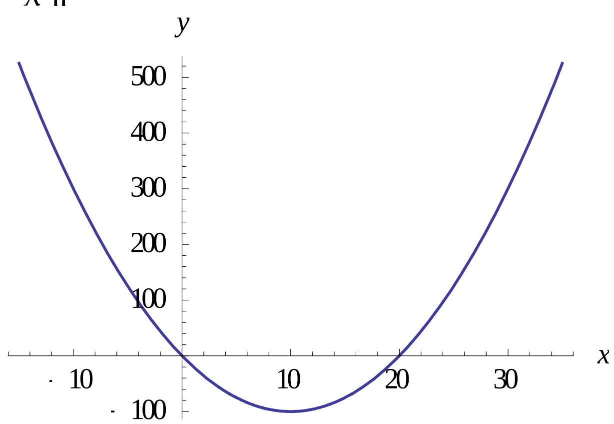
Σχήμα 1.



Σχήμα 2.



Σχήμα 3.



Σχήμα 4.

(1+1+1+1=4 Μονάδες)

D. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις *αιτιολογώντας* την απάντηση σας.

i) Οι ευθείες y-x=1 και x+y=1 τέμνονται στο σημείο:

A.(0,-1) B.(-1,0) Γ.(0,1) Δ.(0,0) Ε.(1,0)

ii) Αν το σύστημα $\begin{cases} 2x + ky = 0 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο, το k ισούται με:

A.3 B.-3 Γ.0 Δ.2 Ε.οποιονδήποτε αριθμό

iii) Αν $(D-1)^2 + |D_y - 5| + D_x^2 = 0$ τότε για το σύστημα ισχύει:

A.έχει λύση το (5,0) B.έχει λύση το (-5,0) Γ.έχει άπειρες λύσεις Δ.είναι αδύνατο Ε.κανένα από τα προηγούμενα

iv) Αν για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + a, a \in R$ ισχύει $f(\sqrt{2}) = 6$ τότε το $f(-\sqrt{2})$ ισούται με:

A.-1 B.0 Γ.5 Δ.6 Ε.$\sqrt{2}$

v) Μία άρτια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R στο $x_0 = 2$ έχει μέγιστο f(2)=5. Η τιμή της f στο -2 είναι:

A.4 B.3 Γ.2 Δ.-1 Ε.5

(1+1+1+1+1=5 Μονάδες)

E. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως *Σωστή* ή *Λάθος*.

i) Μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.

ii) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$.

iii) Αν η μέγιστη τιμή μίας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

iv) Η συνάρτηση $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.

v) Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η –f είναι περιττή.

(1+1+1+1+1=5 Μονάδες)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

A. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x^2 + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

i) Να εξετάσετε αν κάποιο από τα $(-1,-2)$, $(2,0)$ και $(-7,-18)$ είναι λύση του συστήματος.

ii) Να λυθεί το σύστημα.

(6+7=13 Μονάδες)

B. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y}=-5 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$

(5 Μονάδες)

C. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x,y έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει: $D^2+D_x^2+D_y^2=D\cdot D_x+D\cdot D_y+D_x\cdot D_y$ να λυθεί το σύστημα.

(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

A. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+8y=4\lambda-x \\ \lambda x+\lambda y=3\lambda-3y-1 \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να λυθεί το σύστημα για την τιμή $\lambda'=1$.
ii) Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση ;
iii) Για ποιες τιμές του λ το σύστημα είναι αδύνατο;
iv) Να αποδειχθεί ότι όταν το σύστημα έχει μοναδική λύση αυτή είναι της μορφής $(x_o,y_o)=(\dfrac{4\lambda-8}{\lambda-3},\dfrac{-\lambda+1}{\lambda-3})$.
v) Για ποια τιμή του λ η λύση του ερωτήματος iv) είναι σημείο της ευθείας $x_o+2y_o=1$;

(4+4+4+4+4=20 Μονάδες)

B. Να λυθεί η εξίσωση $(x-y+z-\lambda')^2+(2x-3y+z)^4+(3x+y+z-5)^6=0$, όπου λ' η τιμή του ερωτήματος **A** i).

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
ii) Να αποδειχθεί ότι είναι περιττή .
iii) Να αποδειχθεί ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.
iv) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{55\cdot 226}{113^2-4\cdot 55^2}>\dfrac{11\cdot 46}{23^2-4\cdot 11^2}$.

(5+5+5+5=20 Μονάδες)

B. Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-7x\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3$.

(5 Μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1Ο

A. Σχολ. βιβλίο σελ: 35,36
B. Σχολ. βιβλίο σελ: 33
C. Σχήμα 1. : Άρτια
Σχήμα 2. : Περιττή
Σχήμα 3. : Περιττή
Σχήμα 4. : Τίποτα
D. Απαντήσεις

i) Γ

$$\begin{cases} y-x=1 \\ x+y=1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2y=2 \Leftrightarrow y=1$$

Αν $y=1$ τότε $x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

$(x,y)=(0,1)$

ii) Α

$$\begin{cases} 2x+ky=0 \quad \cdot(3) \\ 6x+9y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3ky=0 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$$

Για να είναι αδύνατο το σύστημα αρκεί $3k=9 \Leftrightarrow k=3$

iii) Ε

$(D-1)^2+|D_y-5|+D_x^2=0$, θα πρέπει $\begin{matrix} D-1=0 \Leftrightarrow D=1 \\ D_y-5=0 \Leftrightarrow D_y=5 \\ D_x=0 \end{matrix}$

Άρα $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{0}{1},\dfrac{5}{1}\right)=(0,5)$

iv) Δ

Αφού f άρτια συνάρτηση τότε $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=6$

v) Ε

Αφού f άρτια συνάρτηση τότε $f(2)=f(-2)=5$

Ε. Απαντήσεις

i) Σ
ii) Λ
iii) Σ
iv) Λ
v) Σ

<u>ΘΕΜΑ 2Ο</u>

Α.

i) $\begin{cases} x^2+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \underset{y=-2}{\overset{x=-1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} (-1)^2+3(-2)=-5 \\ 2(-1)-(-2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5=-5 \\ 0\neq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \underset{y=0}{\overset{x=2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} (2)^2+3\cdot 0=-5 \\ 2\cdot 2-0=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\neq -5 \\ 4=4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \underset{y=-18}{\overset{x=-7}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} (-7)^2+3(-18)=-5 \\ 2(-7)-(-18)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5=-5 \\ 4=4 \end{cases}$

Άρα το σημείο (-7,-18) είναι λύση του συστήματος.

ii)

$\begin{cases} x^2+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3y=-5 \\ y=2x-4 \end{cases}$

$x^2+3(2x-4)=-5 \Leftrightarrow x^2+6x-7=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-7 \end{matrix}$

Αν $x_1=1$ τότε $y_1=-2$ $(x_1,y_1)=(1,-2)$

Αν $x_2=-7$ τότε $y_2=-18$ $(x_2,y_2)=(-7,-18)$

Β.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y}=-5 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)^2+3\cdot\dfrac{3}{y}=-5 \\ 2\cdot\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases} \underset{b=\frac{3}{y},y\neq 0}{\overset{a=\frac{2}{x},x\neq 0}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} a^2+3b=-5 \\ 2a-b=4 \end{cases}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα $\begin{matrix} (a_1,b_1)=(1,-2) \\ (a_2,b_2)=(-7,-18) \end{matrix}$

Άρα $\begin{matrix} (x_1,y_1)=(2,-\dfrac{3}{2}) \\ (x_2,y_2)=(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{1}{6}) \end{matrix}$

C.

$$D^2+D_x^2+D_y^2=D\cdot D_x+D\cdot D_y+D_x\cdot D_y \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$
$$2D^2+2D_x^2+2D_y^2=2D\cdot D_x+2D\cdot D_y+2D_x\cdot D_y \Leftrightarrow$$
$$(D^2-2D\cdot D_x+D_x^2)+(D^2-2D\cdot D_y+D_y^2)+(D_x^2-2D_x\cdot D_y+D_y^2)=0 \Leftrightarrow$$
$$(D-D_x)^2+(D-D_y)^2+(D_x-D_y)^2=0$$
$$D-D_x=0$$
$$D-D_y=0$$
$$D_x-D_y=0$$
$$D=D_x=D_y$$
$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=(1,1)$$

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

A. $\begin{cases} \lambda x+8y=4\lambda-x \\ \lambda x+\lambda y=3\lambda-3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)x+8y=4\lambda \\ \lambda x+(\lambda+3)y=3\lambda-1 \end{cases} (\Sigma)$

i) Αν $\lambda=1$

$\begin{cases} 2x+8y=4 \\ x+4y=2 \quad \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+8y=4 \\ 2x+8y=4 \end{cases}$ συνεπώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(k,\frac{2-k}{4}), k\in\mathbb{R}$.

ii) Θα υπολογίσουμε τις ορίζουσες του (Σ).

$$D=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 8 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$
$$D_x=\begin{vmatrix} 4\lambda & 8 \\ 3\lambda-1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=4(\lambda-1)(\lambda-2)$$
$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 4\lambda \\ \lambda & 3\lambda-1 \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2$$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1,3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

iii) Αν $\lambda=1$ γνωρίζω από το ερώτημα i) ότι το σύστημα είναι αόριστο, άρα ελέγχω για $\lambda=3$ αφού για να είναι το σύστημα αδύνατο θα πρέπει $D=0$. Για $\lambda=3$ το (Σ) γίνεται:

$\begin{cases} 4x+8y=12 \quad \cdot(3) \\ 3x+6y=8 \quad \cdot(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+24y=36 \\ 12x+24y=32 \end{cases}$ άρα αδύνατο.

iv) Η μοναδική λύση του συστήματος για $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1,3$ είναι:

$$(x_o,y_o)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{4\lambda-8}{\lambda-3},\frac{-\lambda+1}{\lambda-3}\right)$$

v) Άρα η μοναδική λύση θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας $x+2y=1$.

$$\frac{4\lambda-8}{\lambda-3}+2\cdot\frac{-\lambda+1}{\lambda-3}=1 \Leftrightarrow$$
$$4\lambda-8+2(1-\lambda)=\lambda-3 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=3$$

Όμως για $\lambda=3$ το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση άρα δεν υπάρχει τιμή του λ.

B.

$$\left(x-y+z-\lambda\right)^2+\left(2x-3y+z\right)^4+\left(3x+y+z-5\right)^6=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x-y+z-1\right)^2+\left(2x-3y+z\right)^4+\left(3x+y+z-5\right)^6=0$$

Άρα αρκεί να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x+y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y-z \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x+y+z=5 \end{cases} \overset{x=1+y-z}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(1+y-z)-3y+z=0 \\ 3(1+y-z)+y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ 4y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Συνεπώς $(x,y,z)=(1,1,1)$.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

i) Θα πρέπει $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$. Δηλαδή $D_f=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$.

ii) Η f είναι περιττή αφού:

$\forall x\in D_f, -x\in D_f$

$$f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2-4}=-\frac{2x}{x^2-4}=-f(x)$$

iii) Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα θα πρέπει $\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ να ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Επίσης $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{2}{x-\dfrac{4}{x}}$, άρα

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{x_1} > \frac{4}{x_2} \Leftrightarrow$$
$$-\frac{4}{x_1} < -\frac{4}{x_2} \overset{+(x_1<x_2)}{\Leftrightarrow}$$
$$x_1 - \frac{4}{x_1} < x_2 - \frac{4}{x_2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{x_1 - \frac{4}{x_1}} > \frac{1}{x_2 - \frac{4}{x_2}} \Leftrightarrow$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.

iv) Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\dfrac{55\cdot 226}{113^2-4\cdot 55^2} > \dfrac{11\cdot 46}{23^2-4\cdot 11^2}$

$$\frac{55\cdot 226}{113^2-4\cdot 55^2} > \frac{11\cdot 46}{23^2-4\cdot 11^2} \Leftrightarrow \frac{2\frac{113}{55}}{\left(\frac{113}{55}\right)^2-4} > \frac{2\frac{23}{11}}{\left(\frac{23}{11}\right)^2-4} \Leftrightarrow f\left(\frac{113}{55}\right) > f\left(\frac{23}{11}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{113}{55}\right) > f\left(\frac{115}{55}\right)$$

αφού $\dfrac{113}{55} < \dfrac{115}{55}$ και f γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$ τότε

$f\left(\dfrac{113}{55}\right) > f\left(\dfrac{115}{55}\right)$ δηλαδή $\dfrac{55\cdot 226}{113^2-4\cdot 55^2} > \dfrac{11\cdot 46}{23^2-4\cdot 11^2}$.

Β. Για να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$ κάνουμε τις πράξεις στις ορίζουσες.

$$\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \Leftrightarrow (x^2-3)\cdot 1 - 5(-4) + 5x\cdot 2 - 3\cdot 4 - 7x(2\cdot 8 - 3\cdot 5) = 3 \Leftrightarrow$$
$$x^2+3x+2=0$$
$$x_{1,2} = 1, 2$$