ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

06/11/2016

ΘΕΜΑ Α

A. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$.

B. Πότε μία συνάρτηση λέγεται άρτια;

C. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο;

D. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

γωνία θ	**πρόσημο ημθ**	**πρόσημο συνθ**	**πρόσημο εφθ**	**πρόσημο σφθ**
117^o				
-100^o				
925^o				
-40^o				

E. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως *Σωστή* ή *Λάθος*.

i) Μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση έχει ακριβώς μία ρίζα.

ii) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$.

iii) Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο τότε δεν παρουσιάζει ελάχιστο και το αντίστροφο.

iv) Η συνάρτηση $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.

v) Αν μία συνάρτηση f είναι περιττή, τότε έχει άξονα συμμετρίας τον yy′.

ΘΕΜΑ Β

A. Αν $ημω = \frac{3}{5}$ και $90^o \le ω \le 180^o$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

B. Αν το ημίτονο και το συνημίτονο μίας γωνίας α είναι ίσοι αριθμοί τότε να βρείτε ποιες μπορεί να είναι οι τιμές τους.

C. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $ημx = \frac{1}{3}$ και $συνx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ii) $ημx = κ - 2$ και $συνx = κ + 2$ όπου $κ \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Α. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ και $\beta = \dfrac{\left\{\left(\left(5^3\right)^{12} : 5^{2^5}\right) - 5^2\right\} : 50}{\left\{\left(4 + 8^{26} : 4^{39}\right) : 5\right\}\cdot 4}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Αν α=4, β=3 να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \beta\cdot x\cdot y = 9 \end{cases}$.

iii) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \varepsilon\varphi^{\beta} x + \varepsilon\varphi^{\frac{\alpha}{2}} x + \varepsilon\varphi x + x + \alpha - \beta$ όπου α και β οι τιμές του ερωτήματος i).

ΘΕΜΑ Δ

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Αν η συνάρτηση f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Β(1,0) να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β.

iii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το -1. Να προσδιορίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -\pi$.

Β. Αν $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = x_0$ όπου x_0 η θέση του ελαχίστου της συνάρτησης f του ερωτήματος **Α. iv)** να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

ii) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$

iii) $\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x$

iv) $\varepsilon\varphi^3 x + \sigma\varphi^3 x$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A. Σχολ. βιβλίο σελ. 60
B. Σχολ. βιβλίο σελ. 35
C. Σχολ. βιβλίο σελ. 33
D.

γωνία θ	**πρόσημο ημθ**	**πρόσημο συνθ**	**πρόσημο εφθ**	**πρόσημο σφθ**
117^o	+	-	-	-
-100^o	-	-	+	+
925^o	-	-	+	+
-40^o	-	+	-	-

E.
i) Λ
ii) Λ
iii) Λ
iv) Λ
v) Λ

ΘΕΜΑ Β

A. Από την ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε:

$$συν^2ω = 1 - ημ^2ω = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \begin{matrix} συνω = \frac{4}{5} \\ συνω = -\frac{4}{5} \end{matrix}$$

Όμως επειδή $90^o \leq ω \leq 180^o$ τότε $συνω = -\frac{4}{5}$.

Η εφω και η σφω υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ και } σφω = \frac{συνω}{ημω} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

B. Επειδή το ημίτονο και το συνημίτονο μίας γωνίας α είναι ίσοι αριθμοί τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $ημα = συνα$. Έτσι από την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2α + συν^2α = 1$ θα ισχύει ότι:

$$ημ^2α + συν^2α = 1 \Rightarrow ημ^2α + ημ^2α = 1 \Rightarrow ημ^2α = \frac{1}{2} \Rightarrow ημα = \begin{matrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

Δηλαδή $ημα = συνα = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $ημα = συνα = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. Αν υπάρχει τέτοιο x, θα ισχύει $ημ^2x + συν^2x = 1$.

i) Άρα,

$$ημ^2x + συν^2x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

Συνεπώς υπάρχει x τέτοιο ώστε $ημx = \frac{1}{3}$ και $συνx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

ii) Αντίστοιχα έχουμε:

$$ημ^2x + συν^2x = (κ-2)^2 + (κ+2)^2 = κ^2 - 2κ + 4 + κ^2 + 2κ + 4 = 2κ^2 + 8 \neq 1$$

Διότι, αν ήταν $2κ^2 + 8 = 1 \Rightarrow κ^2 = -\frac{7}{2}$, άτοπο αφού $κ^2 \geq 0$.

ΘΕΜΑ Γ

A.

i) $α = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{12}{6}} = 4$

$$β = \frac{\left\{\left(\left(5^3\right)^{12} : 5^{2^5}\right) - 5^2\right\} : 50}{\left\{\left(4 + 8^{26} : 4^{39}\right) : 5\right\} \cdot 4} = \frac{\left\{\left(5^{36} : 5^{32}\right) - 5^2\right\} : 50}{\left\{\left(4 + (2^3)^{26} : 2^{78}\right) : 5\right\} \cdot 4} = \frac{\frac{5^4 - 5^2}{50}}{\frac{4 + 2^0}{5} \cdot 4} = \frac{\frac{625 - 25}{50}}{4 \cdot \frac{5}{5}} = \frac{\frac{600}{50}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

ii) Αν $α = 4$, $β = 3$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x \cdot y = 9 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x \cdot y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x \ (1) \\ x \cdot y = 3 \ (2) \end{cases}$$

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x(4-x) = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

Αν $x_1 = 1$ τότε $y_1 = 4 - 1 = 3$

Αν $x_2 = 3$ τότε $y_2 = 4 - 3 = 1$

Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι τα σημεία Α(1,3) και Β(3,1).

$$\frac{ημx+συνx}{συν^3x}=εφ^βx+εφ^{\frac{α}{2}}x+εφx+α-β \Rightarrow \frac{ημx+συνx}{συν^3x}=εφ^3x+εφ^2x+εφx+1 \Leftrightarrow$$

$$ημx+συνx=ημ^3x+συνx\cdot ημ^2x+ημx\cdot συν^2x+συν^3x \Leftrightarrow$$

iii) $ημ^3x+συνx\cdot ημ^2x-συνx+ημx\cdot συν^2x-ημx+συν^3x=0 \Leftrightarrow$

$$ημ^3x-ημx(1-συν^2x)-συνx(1-ημ^2x)+συν^3x=0 \Leftrightarrow$$

$$ημ^3x-ημ^3x-συν^3x+συν^3x=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Α.

i) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, συνεπώς το πεδίο ορισμού της είναι το $D_f=\mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=αx^2+βx$ διέρχεται από τα σημεία Α(-1,8) και Β(1,0). Άρα ,

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} α+β=0 \\ α-β=8 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2α=8 \Rightarrow α=4$$

Αν $α=4$ τότε $4+β=0 \Rightarrow β=-4$

iii) Αρχικά ισχύει ότι για κάθε $x\in D_f$ και $-x\in D_f$.

Όμως $f(-x)\neq -f(x)$, αφού $f(-1)\neq -f(1) \Leftrightarrow 8\neq 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση f δεν είναι περιττή στο πεδίο ορισμού της.

iv) Για να έχει ελάχιστο η συνάρτηση f το -1 θα πρέπει:

$$f(x)\geq -1 \Leftrightarrow 4x^2-4x\geq -1 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$$

άρα η f έχει ελάχιστο το -1.

Η εξίσωση $f(x)=-π$ θα είναι αδύνατη αφού η f έχει ελάχιστο το -1 και ισχύει ότι $-π<-1$.

v) Αρχικά θα πρέπει να βρούμε τη θέση ελαχίστου της συνάρτησης f λύνοντας την εξίσωση:

$$f(x_0)=-1 \Leftrightarrow 4{x_0}^2-4x_0=-1 \Leftrightarrow 4{x_0}^2-4x_0+1=0 \Leftrightarrow (2x_0-1)^2=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

Η συνάρτηση g που προκύπτει από τη μετατόπιση της συνάρτησης f έτσι ώστε να έχει ελάχιστο το -2π στη θέση +4 είναι:

$$g(x)=f\left(x-\frac{7}{2}\right)-2\pi+1=4\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-4\left(x-\frac{7}{2}\right)-2\pi+1$$

Β. Έχουμε ότι $εφx+σφx=4\cdot x_0$. Συνεπώς, $εφx+σφx=4\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow εφx+σφx=2$.

i) $εφx+σφx=2\Rightarrow \frac{ημx}{συνx}+\frac{συνx}{ημx}=2\Rightarrow \frac{ημ^2x+συν^2x}{ημx\cdot συνx}=2\Rightarrow ημx\cdot συνx=\frac{1}{2}$

ii) $(ημx+συνx)^2=ημ^2x+2ημx\cdot συνx+συν^2x=1+2ημx\cdot συνx=1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

iii) Ισχύει ότι $εφx+σφx=2$. Άρα έχουμε ότι:

$(εφx+σφx)^2=2^2\Rightarrow εφ^2x+2εφx\cdot σφx+σφ^2x=4\Rightarrow εφ^2x+σφ^2x=2$

iv) $εφ^3x+σφ^3x=(εφx+σφx)(εφ^2x-εφx\cdot σφx+σφ^2x)=(εφx+σφx)(εφ^2x-1+σφ^2x)=$
$=2\cdot(2-1)=2$