ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 31/01/2015

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

A. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής και να αποδείξετε ότι $|x+y| \le |x|+|y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(4+6=10 Μονάδες)

B. Να γράψετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας.

(2 Μονάδες)

C. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις.

i) Ισχύει ότι $(-\alpha-\beta)^2 = (-\alpha+\beta)^2$.

ii) Ισχύει ότι $(\alpha-\beta)^3 = -(\beta+\alpha)^3$.

iii) Ισχύει ότι $|\alpha-\beta| = -|\beta-\alpha|$.

iv) Αν ν άρτιος και $\alpha \cdot \beta \ne 0$, τότε ισχύει $\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{-\nu}$.

v) Αν $\alpha, \beta \ne 0$, με $\alpha > \beta$, τότε $\dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$.

vi) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

vii) Αν $\alpha > 0$, τότε $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^3$.

(7 Μονάδες)

D. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή Ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-3\rvert \le 1$		
	$d(x,2) > 3$	
		$x \in (-4,4)$

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

A. Αν ισχύει ότι $|\alpha-2| \le 1$ και $|\beta+3| \le 1$

i) Να αποδείξετε ότι $1 \le \alpha \le 3$ και $-4 \le \beta \le -2$.

ii) να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

a) $2\alpha+3\beta$ b) $\alpha-\beta$ c) $\alpha^2+\beta^2$ d) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3+3+3+3+3=15 Μονάδες)

Β. Να αποδείξετε ότι $x\cdot y \le \dfrac{x^2+y^2}{2} \le \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$ για $x \ne y$.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

Α. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{2\sqrt[5]{2^3\sqrt[3]{2}}}\cdot 2^{\frac{7}{6}}$ και $\beta=3^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{6}}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=3$.

ii) Αν ισχύει ότι $\beta<x<\alpha$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση: $A=|2x-6|-|3x-12|$.

(8+6=14 Μονάδες)

Β. Έστω η παράσταση $A=\sqrt[5]{\sqrt[6]{6^2}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{6^9}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt[4]{6^{19}}}}$.

i) Να αποδείξετε ότι $A=\sqrt[5]{6^3}$.

ii) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{4}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

(7+4=11 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Α. Δίνεται οι εξισώσεις $(2\lambda+6)x=\mu^2-4$ (1) και $(\lambda+3)x=2\lambda+\mu+4$ (2)

i) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε η (1) να είναι ταυτότητα και η (2) να είναι αδύνατη.

ii) Αν $\mu=-2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{\mu^2}\cdot|x-3|=x-\mu$ έχει ρίζες τους αριθμούς $x_{1,2}=8,\dfrac{4}{3}$.

iii) Αν κ η ακέραια ρίζα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε τις κοινές λύσεις (αν υπάρχουν) των εξισώσεων $x^2-(\sqrt{3}+9-\kappa)x+\sqrt{3}=0$ και $x^4-5x^2+\dfrac{\kappa}{2}=0$.

(4+5+8=17 Μονάδες)

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\big|x-|2x-6|\big|=|x-8|$.

(8 Μονάδες)

ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 31/01/2015

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

A. Σχολ. βιβλίο σελ. 62-63
B. Σχολ. βιβλίο σελ. 69
C.

i) Λ
ii) Λ
iii) Λ
iv) Λ
v) Λ
vi) Λ
vii) Λ

D.

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή Ένωση διαστημάτων**
$\|x-3\| \le 1$	$d(x,3) \le 1$	$x \in [2,4]$
$\|x-2\| > 3$	$d(x,2) > 3$	$x \in (-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$
$\|x\| < 4$	$d(x,0) < 4$	$x \in (-4,4)$

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

A.

i) $-1 \le \alpha - 2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \alpha \le 3$
$-1 \le \beta + 2 \le 1 \Leftrightarrow -4 \le \beta \le -2$

ii)

a) $1 \le \alpha \le 3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2 \le 2\alpha \le 6$

$-4 \le \beta \le -2 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} -12 \le 3\beta \le -6$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις και προκύπτει:
$-10 \le 2\alpha + 3\beta \le 0$

b) $1 \le \alpha \le 3$ και $-4 \le \beta \le -2 \overset{\cdot -1}{\Leftrightarrow} 2 \le -\beta \le 4$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις και προκύπτει:
$3 \le \alpha - \beta \le 7$

c) $1 \le \alpha \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \alpha^2 \le 9$

$-4 \le \beta \le -2 \overset{\cdot -1}{\Leftrightarrow} 4 \ge -\beta \ge 2 \Leftrightarrow 2 \le -\beta \le 4 \Leftrightarrow 4 \le \beta^2 \le 16$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις και προκύπτει:

$5 \le \alpha^2 + \beta^2 \le 25$

d) $-4 \le \beta \le -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \ge \frac{1}{\beta} \ge -\frac{1}{2} \overset{-1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4} \le -\frac{1}{\beta} \le \frac{1}{2}$

$1 \le \alpha \le 3$

Πολλαπλασιάζουμε τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και προκύπτει:

$1 \cdot \frac{1}{4} \le \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\beta}\right) \le 3 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \frac{\alpha}{\beta} \le -\frac{1}{4}$

B. $x \cdot y \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)^2 \ge 0$ Ισχύει

$\frac{x^2+y^2}{2} \le \frac{x^3-y^3}{x-y} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \le \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y} \overset{x-y\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x^2+y^2}{2} \le x^2+xy+y^2$

$x^2+y^2 \le 2x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 0$ Ισχύει

Άρα $x \cdot y \le \frac{x^2+y^2}{2} \le \frac{x^3-y^3}{x-y}$

ΘΕΜΑ 3^{O}

A.

i) $\alpha = \sqrt{2\sqrt[5]{2^3\sqrt[3]{2}}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} = \sqrt{2\sqrt[5]{2^{3+\frac{1}{3}}}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} = \sqrt{2^{1+\frac{2}{3}}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} = 2^2 = 4$

$\beta = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{6}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3$

ii) Συνεπώς από το προηγούμενο ερώτημα $3 < x < 4$, άρα $6 < 2x < 8$ και $9 < 3x < 12$

$A = |2x-6| - |3x-12| = 2x-6-(-(3x-12)) = 5x-18$

B.

i) $A = \sqrt[5]{\sqrt[6]{6^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{6^9}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt[4]{6^{19}}}} = \sqrt[5]{6^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[6]{6^{\frac{9}{4}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[10]{6^{\frac{19}{4}}}} = 6^{\frac{1}{15}} \cdot 6^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{\frac{19}{120}} = \sqrt[5]{6^3}$

ii) $\frac{4}{A} = \frac{4}{\sqrt[5]{6^3}} = \frac{4\sqrt[5]{6^2}}{6} = \frac{2\sqrt[5]{36}}{3}$

ΘΕΜΑ 4^{O}

A.

i) Η (1) είναι ταυτότητα, όταν λ= -3 και (μ=2 ή μ= -2). Η (2) είναι αδύνατη, όταν λ= -3 και $2\lambda+\mu+4 \neq 0 \Leftrightarrow -6+\mu+4 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 2$

Τελικά λ= -3 και μ= -2

ii) Αν μ= -2 τότε

$$\sqrt{\mu^2}\cdot|x-3|=x-\mu \overset{\mu=-2}{\Rightarrow} 2\cdot|x-3|=x+2 \Leftrightarrow |x-3|=\frac{x+2}{2} \Rightarrow$$

$$x-3=\frac{x+2}{2} \Leftrightarrow x=8$$

$$x-3=-\frac{x+2}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

iii) Για κ=8 έχουμε:

$$x^2-(\sqrt{3}+9-\kappa)x+\sqrt{3}=0 \overset{\kappa=8}{\Rightarrow} x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[-(\sqrt{3}+1)\right]^2-4\cdot 1\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$x_1=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{2}{2}=1$$

$$x^4-5x^2+\frac{\kappa}{2}=0 \overset{\kappa=8}{\Rightarrow} x^4-5x^2+4=0$$

Θέτουμε $y=x^2$, άρα $y^2-5y+4=0$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $y^2-5y+4=0$ είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9>0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}$$

$$y_1=\frac{8}{2}=4$$

$$y_2=\frac{2}{2}=1$$

Αν $y_1=4 \Rightarrow x=\pm 2$

Αν $y_2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Συνεπώς η κοινή λύση των εξισώσεων είναι η $x=1$.

Β. Έστω η εξίσωση $\big|x-|2x-6|\big|=|x-8|$

$$\big|x-|2x-6|\big|=|x-8| \Rightarrow \begin{array}{l} x-|2x-6|=x-8 \Leftrightarrow |2x-6|=8 \\ x-|2x-6|=-x+8 \Leftrightarrow |2x-6|=2x-8 \end{array}$$

Αρχικά λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$|2x-6|=8 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-6=8 \Leftrightarrow x=7 \\ 2x-6=-8 \Leftrightarrow x=-1 \end{array}$$

Και τη δεύτερη εξίσωση ως εξής:

$$|2x-6|=2x-8 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-6=2x-8 \Leftrightarrow 0x=-2 \quad \text{αδύνατη} \\ 2x-6=-2x+8 \Leftrightarrow 4x=14 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2} \quad \text{αδύνατη} \end{array}$$

για $2x-8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $|x-|2x-6||=|x-8|$ είναι οι $x=7, \ \ x=-1$.